GUIDO FUBINI

PROFESSORE NELLA REGIA UNIVERSITÀ DI GENOVA

INTRODUZIONE

ALLA

TEORIA DEI GRUPPI DISCONTINUI

E DELLE

FUNZIONI AUTOMORFE

5167

PISA

ENRICO SPOERRI, LIBRAIO-EDITORE

1908

GUIDO FUBINI

PROFESSORE NELLA REGIA UNIVERSITÀ DI GENOVA

INTRODUZIONE

ALLA

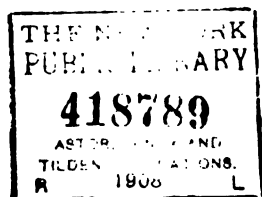
TEORIA DEI GRUPPI DISCONTINUI

E DELLE

FUNZIONI AUTOMORFE

5167

PISA

ENRICO SPOERRI, LIBRAIO-EDITORE

1908

PREFAZIONE

Un nuovo trattato sulla teoria delle funzioni automorfe può sembrare audace impresa dopo la classica opera di Klein e Fricke, la quale, partendo dalla teoria dell'icosaedro, dà un'esposizione completa della teoria delle funzioni modulari ellittiche, dei gruppi projettivi discontinui e delle funzioni automorfe di una sola variabile. Mi affretto quindi a dichiarare che il piano del presente libro si discosta completamente da quello che informa quell'opera; onde oserei dire che, pure avendo qualche punto di contatto, il trattato di Klein e Fricke ed il presente si integrano piuttosto che escludersi.

Mentre infatti i due illustri analisti germanici studiano nei minimi particolari la teoria delle funzioni automorfe di una sola variabile, nel presente volume ho cercato di dare uno sguardo d'insieme alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe in un numero qualunque di variabili, e di porre in luce sia i risultati principali fin qui con-

seguiti, sia i problemi che ancora aspettano una risoluzione. Ho quindi cercato di esporre i tratti fondamentali ed essenziali delle singole teorie, e di mostrare i legami che le uniscono alle altre parti dell'analisi moderna, senza entrare nei minuti particolari di esse. E perciò teoremi, e qualche volta intere teorie ho taciuto oppure ho soltanto accennato, poichè mi parvero non essenziali al mio scopo; qualche risultato, che mi pare nuovo, ho aggiunto talvolta, quando mi sembrò utile allo svolgimento generale. Cosicchè la lettura di questo libro non dispensa affatto dalla lettura e dallo studio delle memorie originali, ma spero possa servire ad esse utilmente di coordinamento e di introduzione.

Ho cercato sempre di rivedere e di completare nel modo più accurato tanto l'enunciato che la dimostrazione dei singoli teoremi, e di raggiungere il massimo rigore e la massima chiarezza; ciò che mi ha indotto a dare di molti teoremi un enunciato meno ampio di quello abituale, perchè mi parve che così soltanto si raggiungesse il doveroso rigore. E se talvolta non avrò raggiunto lo scopo, il lettore voglia scusarmi, pensando alla grande mole e molteplicità di ricerche che si trovano qui la prima volta sviluppate e coordinate in un libro.

Nel lavoro di critica, nelle successive correzioni del manoscritto e delle bozze mi furono del massimo aiuto le acute ed importanti osservazioni dell'amico Dott. Eugenio Elia Levi. A lui debbo pure molti miglioramenti essenziali e molti consigli preziosi per l'ordinamento generale del libro e per la esposizione dei singoli paragrafi. Mi è grato quindi esprimergli pubblicamente la mia più affettuosa riconoscenza.

*
* *

Mi sono sforzato di rendere la lettura del presente trattato accessibile anche a coloro, che si avviano per la prima volta a studii di analisi, procurando di supporre note al lettore la minor quantità possibile di cognizioni. Così non ho mai accennato alla teoria di GALOIS delle equazioni algebriche e alla moderna teoria delle equazioni differenziali lineari alle derivate ordinarie: ciò che ha necessariamente portato qualche lacuna (che credo di poco momento) in qualche capitolo di questo libro.

Tuttavia in qualche punto è mi sembrato necessario non tralasciare qualche ricerca speciale e qualche teorema, che pure richiedeva cognizioni più particolari: ebbi cura di inserirli in carattere piccolo: essi possono essere ommessi in una prima lettura, senza danno per l'intelligenza dei seguenti paragrafi.

Ho dovuto però necessariamente supporre noti al lettore il linguaggio iperspaziale, i fondamenti della teoria delle funzioni di variabile complessa, e delle funzioni su una superficie di RIEMANN, e in particolare quindi i teoremi di esistenza per il problema di DIRICHLET, e per gli integrali abeliani su una data superficie di RIEMANN.

Per quanto riguarda queste teorie, il lettore si può riferire alla *Introduzione alla Geometria Proiettiva degli iperspazii* del Prof. E. BERTINI, alle *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche* del Prof. L. BIANCHI, al *Traité d'Analyse* del PICARD, alle *Vorlesungen über Riemann'sche Theorie der Abelschen*

Integrale del NEUMANN. Quando ho dovuto usare qualche teorema relativo a una delle teorie o dei problemi qui ricordati, che sia meno universalmente conosciuto, ho indicato volta a volta in nota a piè di pagina in quale dei tre ultimi trattati citati sopra il lettore può trovarne la dimostrazione.

*
* *

Nella prima parte del libro ho raccolto brevemente quelle teorie sussidiarie, che servono di utile strumento per lo studio dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe: le proprietà fondamentali dei gruppi, la teoria delle metriche, e in particolare delle metriche a curvatura costante ed Hermitiane. Naturalmente mi sono limitato a quanto è strettamente indispensabile alla intelligenza delle altre parti del libro; nè qui sarebbero stati opportuni maggiori sviluppi. Queste teorie così fondamentali per l'analisi odierna hanno già ricevuto numerose esposizioni sistematiche: a me basti citare qui i trattati del Prof. L. BIANCHI sulla geometria differenziale, sulla teoria delle sostituzioni, e sulla teoria dei gruppi continui.

La seconda parte del trattato è dedicata alla teoria dei gruppi discontinui. Nei primi paragrafi pongo la definizione di gruppi propriamente discontinui, deducendola nel modo più spontaneo dall'esame di alcuni problemi fondamentali. Si presentano allora le due questioni di riconoscere quando un gruppo è, o non è propriamente discontinuo, e di costruire i campi fondamentali per un gruppo propriamente discontinuo. A queste questioni sono dedicati i capitoli che seguono. Le applicazioni aritmetiche di tali gruppi, e la teoria dei gruppi

proiettivi su una sola variabile chiudono questa seconda parte del trattato.

La terza parte si occupa delle applicazioni della teoria dei gruppi discontinui alla teoria delle funzioni; in altri termini essa si occupa della teoria delle funzioni automorfe. Dimostrati i relativi teoremi di esistenza, studia le proprietà fondamentali di tali funzioni, le relazioni algebriche tra le funzioni automorfe di una sola variabile, corrispondenti a gruppi distinti, il teorema di diramazione, la generalizzazione alle funzioni automorfe dei teoremi di WEIERSTRASS per le funzioni più volte periodiche, e infine si occupa delle applicazioni di queste funzioni al problema della uniformizzazione delle funzioni polidrome.

Nell' appendice ho trattato delle funzioni modulari in generale; e, in due osservazioni, che seguono, ho completato alcuni paragrafi del testo; una di esse perfeziona lo studio della discontinuità propria dei gruppi kleiniani, fatta al § 30; l'altra, dovuta al Dott. LEVI, completa in un punto essenziale la teoria delle funzioni zetaautomorfe e zetacremoniane di una sola variabile.

Non ho esposto completamente nè la teoria dell'icosaedro, nè la teoria delle funzioni più volte periodiche: esse costituiscono da sole intieri rami dell'analisi odierna, che hanno già raggiunto uno sviluppo assai vasto, e ricevuto numerose esposizioni sistematiche. A me è bastato far rilevare il posto che esse occupano nella teoria generale, a cui è dedicato questo libro.

I sommari dei singoli paragrafi, molto particolareggiati, che si trovano nella tavola delle materie in fondo al volume daranno un'idea più precisa del contenuto del presente libro.

Non ho abbondato in citazioni bibliografiche. Appunto perciò ho creduto mio dovere aggiungere l'elenco delle Memorie, e dei trattati, che più mi hanno giovato, e che hanno più intimi rapporti con le teorie qui svolte.

Gravi e molteplici sono i problemi finora irresoluti, e le lacune, che ancora presenta la teoria, e che necessariamente si ripercuotono in questo trattato. Ma, se io potessi sperare che non fosse stimato affatto inutile il contributo portato dal presente libro, e che d'altro lato questo, dando un'idea chiara dello stato attuale della teoria, potesse fare sentire più vivamente l'importanza di tali problemi, e potesse così incitare qualche studioso ad occuparsi di questa parte così interessante dell'analisi moderna, il mio scopo sarebbe pienamente raggiunto!

GUIDO FUBINI.

ELENCO

delle principali opere consultate.*

Trattati.

Bertini E. — ***Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazii con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità,*** Pisa, Spoerri, 1907 (5, 6, 7, 11, 13).

Bianchi L. — ***Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche.*** Pisa, Spoerri, 1901 (26, 42, 36).

— ***Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*** (litografate) Pisa, Spoerri, 1903 (1, 2, 3, 5).

— ***Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois.*** Pisa, Spoerri, 1899 (1, 2, 3, 23, 38).

— ***Lezioni di Geometria Differenziale.*** Pisa, Spoerri, 1902 (6, 7, 10, 11, 12, 14).

Dirichlet-Dedekind. — ***Lezioni sulla teoria dei numeri.*** Traduzione italiana dal Faifofer. Venezia, Tipografia Emiliana, 1881 (22, 24, 28).

Klein F.** — ***Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünftes Grades.*** Leipzig, Teubner, 1884 (23, 24, 26, 30, 34, 38).

---

* I numeri tra parentesi indicano i numeri del paragrafi, alla cui preparazione è specialmente servita l'opera citata, o che hanno maggior connessione con i problemi a cui è dedicato il libro citato.

** Non sono citate in modo speciale le memorie dei sigg. Klein e Fricke, che pure hanno tanto possentemente contribuito allo sviluppo della teoria, perchè queste memorie sono citate, coordinate e riassunte nelle opere qui elencate.

KLEIN und FRICKE. — *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*. Leipzig, Teubner, 1890-1892 (24, 26, 29, 34, 36, 45).

— *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen*. Leipzig, Teubner, 1897 (5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 34. 35, 37, 45).

KRAZER A. — *Lehrbuch der Thetareihen*. Leipzig, Teubner (42, appendice).

NEUMANN C. — *Vorlesungen über Riemann' s Theorie der Abelschen Integrale*. Leipzig, Teubner, 1884 (36, 37, 44, appendice).

PICARD E. — *Traité d'Analyse*. Paris, Gauthiers Villars (36, 45, appendice).

SCHLESINGER L. — *Handbuch der linearen Differentialgleichungen*. Leipzig, Teubner, 1895-97-98 (1, 33, 39, 42, 43, 45, 48).

Memorie.

APPELL P. — *Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation différentielle* $\Delta F = 0$ « Acta Mathematica », 1884, pagg. 313-14, tomo 4 (36).

BIANCHI L. — *Geometrische Darstellung der Gruppen linearer Substitutionen mit ganzen complexen Coefficienten nebst Anwendungen auf die Zahlentheorie*. « Mathematische Annalen », 1891, pagg. 313 e ss., tomo 38 (26, 27, 28).

— *Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginarii*. « Mathematische Annalen », tomo 40, 1892, pag. 332 e ss. (26, 27, 28).

— *Ricerche sulle forme quaternarie quadratiche e dei gruppi poliedrici*. « Annali di Matematica », 1893, pag. 237 e ss., tomo 21; 1895, pag. 1-45, tomo 23 (22, 26, 27).

BLUMENTHAL O. — *Ueber Modulfunctionen von mehreren Veränderlichen* « Mathematische Annalen », tomo 56, 1903; tomo 58, 1904 (47).

— *Zum Eliminationsproblem bei analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen*. « Mathematische Annalen », tomo 57 (47).

FUBINI G. — *Sulla teoria delle forme quadratiche Hermitiane e sui sistemi di tali forme*. « Atti dell' Accademia Gioenia in Catania », serie 4., volume 17, 1903 (4, 11, 13, 15, 22, 26, 27).

— *Sulle metriche definite da una forma Hermitiana*. « Atti del R. Istituto Veneto », tomo 63, 1903 e « Bollettino dell' Accademia Gioenia in Catania », fasc. 86, 1905 (4, 15).

— ***Sulla teoria dei gruppi discontinui*** « Annali di Matematica », 1905 (4, 8, 18, 19, 20, 21, 22, 27, 28, 29).

— ***Sulla teoria delle funzioni automorfe e delle loro trasformazioni.*** « Annali di Matematica », serie 3., 1907, tomo 14 (17, 40).

— ***Una questione fondamentale per la teoria dei gruppi e delle funzioni automorfe.*** « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », dicembre, 1905 (17).

— ***Nuove ricerche intorno ad alcune classi di gruppi discontinui*** « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », tomo 21, pag. 177-187, (21, 27, appendice).

— ***Sulla costruzione dei campi fondamentali di un gruppo discontinuo*** « Annali di Matematica », serie 3., tomo 12, pag. 347-352, 1906 (25).

HILBERT D. — ***Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen.*** Dritte Mittheilung. « Göttinger Nachrichten », 1905, pag. 307 e seg. (37).

HURWITZ A. — ***Sur Theorie der automorphen Functionen von beliebig vielen Variabeln*** « Mathematische Annalen », 1905, pag. 325-368, tomo 61 (25).

KOEBE P. — ***Ueber die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven*** « Göttinger Nachrichten », 1907, pag. 177-190 (49).

— ***Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischen Kurven.*** « Göttinger Nachrichten » 1907, pag. 191-210 (49).

— ***Ueber konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche*** « Jahresberichte d. d. mathem. Vereinigung », 1907, Band. 16 (49).

LEVI E. — ***Ricerche sulla teoria delle funzioni automorfe.*** « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », dicembre 1906, vol. XV, serie 5. (40).

PICARD E. — ***Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions.*** « Acta Mathematica », tomo 1, 1882-83, pag. 297 e sg. (4, 39, 31).

— ***Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires*** « Acta Mathematica », tomo 2, 1883, pag. 97-113 (4, 39, 41).

— ***Sur les formes quadratiques à indeterminées conjuguées et sur les fonctions hyperfuchsiennes correspondantes*** « Acta Mathematica », tomo 5, 1884-85, pag. 121-182 (4, 39, 41, 48).

— ***De l'équation*** $\Delta u = k e^u$ « Journal de Mathématiques », tomo 9, Serie 4, 1893 e tomo 4, Serie 5, 1898.

POINCARÉ H. — *Théorie des groupes fuchsiens.* « Acta Mathematica », tomo 1, 1882-83, pag. 1 e seg. (10, 11, 12, 14, 19, 21, 24, 30, 31, 32).

— *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes.* « Acta Mathematica », pag. 193 e ss. (39, 40, 41, 44, 48).

— *Mémoire sur les fonctionnes kleinéens.* « Acta Mathematica » tomo 3, pag. 49-91, 1883-84 (10, 11, 12. 14, 19, 21, 24, 30, 31, 32, 39, 40, 41).

— *Sur les groupes des équations linéaires.* « Acta Mathematica », tomo 4, 1884, pag. 201-312.

— *Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes.* « Acta Mathematica », tomo 5, 1884-85, pag. 209-278 (1, 33, 39, 43, 48).

— *Sur l' uniformisation des fonctions analytiques.* « Acta Mathematica », tomo 31 (49).

— *Les fonctions fuchsiennes et l' arithmétique.* « Journal de Mathématiques », tomo 3, Serie 4, 1887, pag. 409 (46, 14).

— *Sur les fonctions fuchsiennes et l' équation* $\Delta u = e^u$ « Journal de Mathématiques », tomo 4, serie 5, 1898 (49).

Sulla teoria delle funzioni cremoniane (§ 17, e appendice) il lettore può consultare:

FUBINI G. — *Sulla teoria delle funzioni automorfe, e delle loro trasformazioni.* « Annali di Matematica », serie 3, tomo 14, 1907, pag. 33-69.

LEVI E. — *Sopra una classe di trascendenti meromorfe.* « Annali di Matematica », serie 3, tomo 14, 1907, pag. 93 e ss.).

PICARD E. — *Sur une classe de trascendantes nouvelles* « Acta Mathematica », tomi 18 e 23.

POINCARÉ H. — *Sur une classe nouvelle de trascendantes uniformes* « Journal de Mathématiques », serie 4, tomo 6, 1890. pag. 313-367.

INDICE

PARTE PRIMA. — **Teorie preliminari.**

PARTE SECONDA. — **I problemi fondamentali, i gruppi propriamente discontinui e le loro applicazioni aritmetiche.**

PARTE TERZA. — **Applicazione dei gruppi discontinui alla teoria delle funzioni.**

Abbreviazioni usate nel testo.

p. d. t. i. = privo di trasformazioni infinitesime.
pr. dis. = propriamente discontinuo.

ERRATA-CORRIGE.

				ERRATA	CORRIGE
pag.	123	riga	3	*omogenea*	*omogenea unimodulare*
»	123	»	18	forme	trasformazioni
»	124	»	28	*Se le*	*Poichè le*
»	124	»	29	se il	poichè il
»	125	»	26	di M	della trasformazione $x'_i = \varphi_i$
»	127	»	24	*lineari*	*lineari intere omogenee unimodulari*
»	128	»	7	*reali*	*reali unimodulari*
»	128	»	11	*Se le*	*Poichè le*
»	128	»	21	*omogenee*	*omogenee unimodulari*
»	170	»	32	KLEINE	KLEIN e
»	176	»	22	G	Γ
»	197	»	33	*qualsiasi*	*generico*
»	198	»	32	punto E	punto generico E
»	291	»	28	$T A_0$	$T_0 A$
»	297	»	4	(10)	(4) (pag. 271)
»	299	»	18	(10)	(4) (pag. 271)
»	352	»	18	k	K

PARTE PRIMA.

TEORIE PRELIMINARI

CAPITOLO PRIMO. — **Trasformazioni e gruppi.**

§ 1. — Trasformazioni.

Siano date n variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, che, a seconda dei casi, supporremo reali, oppure complesse. Diremo ***trasformazione*** il passaggio da queste variabili ad altre n variabili $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, determinato da formole del tipo seguente:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots . x_n) \tag{1}$$

dove le f_i sono funzioni indipendenti delle x. Talvolta considereremo le x come variabili reali, e supporremo che le f_i siano funzioni finite e continue in un certo campo insieme a tutte quelle loro derivate, che sarà necessario di considerare. Talvolta invece considereremo le x come variabili complesse; e supporremo che le f_i siano funzioni analitiche uniformi regolari in un certo campo.

Se con y_i e z_i indichiamo due nuovi sistemi di n variabili ($i = 1, 2, \ldots, n$), noi non considereremo come distinte la trasformazione (1) e la trasformazione

$$z_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Indicheremo quasi sempre una trasformazione con una lettera maiuscola S, oppure T ecc. Talvolta useremo però anche lettere minuscole. Se noi con S indichiamo la trasformazione (1) o (2), noi potremo scrivere le (1), (2) nel seguente modo:

$$(3) \qquad x'_i = Sx_i \qquad\qquad z_i = Sy_i$$

Se poi è T un'altra trasformazione

$$x'_i = \varphi_i\,(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n) = Tx_i,$$

indicheremo con $S\,T$, e chiameremo ***prodotto*** delle trasformazioni S, T la trasformazione definita dalle:

$$x'_i = S\,(Tx_i) = f_i\,(\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_n)$$

dove

$$\varphi_k = \varphi_k\,(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)\ (k = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

La trasformazione $T\,S$ sarà analogamente definita da

$$x'_i = \varphi_i\,(f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n)$$

e sarà in generale distinta dalla $S\,T$. Se $S\,T = T\,S$, le trasformazioni S, T si dicono ***permutabili.*** Sia V un'altra trasformazione. Noi indicheremo con $S\,T\,V$ il prodotto della trasformazione $S\,T$ per la trasformazione V, che evidentemente coincide col prodotto della S per la trasformazione $T\,V$. In simboli scriveremo:

$$S\,T\,V = S\,(T\,V) = (S\,T)\,V$$

In modo analogo, se W è una quarta trasformazione, si definisce il prodotto $S\,T\,V\,W$ ponendo

$$S\,T\,V\,W = S\,(T\,V\,W) = (S\,T\,V)\,W.$$

Si ha evidentemente:

$$S\,T\,V\,W = (S\,T)\,(V\,W) = S\,(T\,V)\,W = \text{ecc.}$$

E così si può continuare, definendo il prodotto di 5, 6 .... trasformazioni. In generale $S\,T\,U\,V \ldots\ldots W = S\,(T\,U\,V \ldots\ldots W)$.

Segue da tutto questo che il prodotto di più trasformazioni gode sempre della proprietà ***associativa,*** mentre in generale non gode della proprietà ***commutativa.***

La trasformazione

$$x'_i = x_i$$

si dice *trasformazione identica* e si indica col simbolo 1.

Se le f_i, che compariscono nelle (1), hanno derivate prime continue (e quindi, poichè sono indipendenti, hanno un Iacobiano diverso da zero) noi potremo risolvere le (1) rispetto alle x. Otterremo così delle formole:

$$(1)' \qquad x_i = F_i(x'_1 \ldots . x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots . n)$$

che ci rappresentano appunto una trasformazione T tale che $TS = 1$; questa trasformazione si dice *inversa* della S e si indica con S^{-1}. Noi potremo dunque supporre che (almeno in un campo abbastanza piccolo) la (1)′ sia completamente individuata dalla (1). Risolvendo le (1)′ rispetto alle x', otteniamo le (1). La inversa della $T = S^{-1}$ è dunque la stessa S. In simboli $(S^{-1})^{-1} = S$.

Siano S, T, U tre trasformazioni. Se $S = T$, evidentemente

$$S\,U = T\,U; \; U\,S = U\,T.$$

Viceversa, se $S\,U = T\,U$, anche $S = T$. E così pure, (se la U^{-1} è completamente individuata dalla U) dalla $U\,S = U\,T$ si trae $U^{-1}\,U\,S = U^{-1}\,U\,T$ e quindi $S = T$. Ponendo $T = 1$, si deduce che, se $S\,U = U$, o $U\,S = U$, la S è necessariamente la trasformazione identica (e viceversa). Appunto perciò la trasformazione identica si indica con 1.

In modo analogo si vede che la proprietà di cui godono due trasformazioni inverse (di avere cioè un prodotto uguale a 1) è caratteristica per esse. Se cioè $S\,T = 1$, allora $S = T^{-1}$, $T = S^{-1}$.

Se A, B, C sono tre trasformazioni che soddisfano alla $AB = C$, avremo $C\,B^{-1} = A\,B\,B^{-1} = A\,(B\,B^{-1}) = A$ e così pure $B = A^{-1}C$. Le tre uguaglianze

$$A\,B = C; \qquad A = C\,B^{-1}; \qquad B = A^{-1}\,C$$

sono equivalenti; da una di esse si possono dedurre le altre due.

Il prodotto di m trasformazioni, uguali a una trasformazione

T, si indica con T^m. Se $S = T^{-1}$, si indica con T^{-m} la S^m. Posto $T^0 = 1$, si ha, per valori qualunque degli interi p, q positivi, negativi o nulli:

$$T^p\, T^q = T^{p+q}.$$

Se S, T sono due trasformazioni, la trasformazione $T^{-1} S\, T$ si dice ***simile*** a S; essa si chiama anche ***trasformata*** di S mediante la T.

Chiaramente si ha $T^{-1} S\, T = S$ allora e allora soltanto che $T\, T^{-1} S\, T = T\, S$, ossia che $S\, T = T\, S$, ossia che le trasformazioni S, T sono permutabili. La trasformazione $T^{-1}\, S^{-1}\, T$, trasformata della trasformazione S^{-1} inversa di S, è l'inversa della trasformazione $T^{-1}\, S\, T$, trasformata di S, perchè

$$T^{-1}\, S^{-1}\, T\, T^{-1}\, S\, T = T^{-1}\, S^{-1}\, S\, T = T^{-1}\, T = 1.$$

In modo analogo si vede che, se S è uguale al prodotto delle trasformazioni $S_1, S_2, \ldots, S_k$, la $T^{-1} S\, T$ è uguale al prodotto delle trasformazioni $T^{-1} S_i\, T\, (i = 1, 2, \ldots, k)$, trasformate delle S_i, prese nello stesso ordine. Infatti

$$T^{-1} S_1\, T T^{-1} S_2\, T T^{-1} S_3 \ldots T^{-1}\, T S_k\, T = T^{-1} S_1\, S_2 \ldots S_k\, T = T^{-1} S\, T$$

Due enti si diranno ***equivalenti*** rispetto alla T, se uno di essi è trasformato dell'altro mediante la T.

Osservazione. — In quest'ultima parte del § 1 ci riferiamo soltanto a trasformazioni lineari omogenee intere su n variabili ossia a trasformazioni del tipo $x'_i = \sum_k a_{ik}\, x_k\, (i, k = 1, 2, \ldots n)$. Le a_{ik} si diranno i *coefficienti* della trasformazione. Le trasformazioni siffatte si diranno qui per brevità trasformazioni lineari. Una trasformazione lineare del tipo $x'_i = m_i\, x_i + p_i\, x_{i-1}$, dove $| m_1 | = | m_i | = 1, p_1 = 0, (m_i - m_{i-1})\, p_i = 0\; (i = 2, 3, \ldots n)$, si dirà una trasformazione U.

Si dimostra facilmente col metodo di induzione completa che, se i coefficienti di k trasformazioni lineari $T_1, T_2, \ldots, T_k$ sono inferiori in modulo rispettivamente alle costanti $M_1, M_2, \ldots M_k$,

i coefficienti del prodotto $T_1\, T_2 \ldots\, T_k$ (che è pure una trasformazione lineare) sono in modulo inferiori a $n^{k-1}\, M_1\, M_2 \ldots\, M_k$(*).

Così pure si dimostra che i coefficienti di T^k, se T è una trasformazione U, sono in modulo inferiori a Mk^n (**), dove M è una costante abbastanza grande dipendente dai coefficienti della T, ma indipendente da k. Sia $W = V^{-1}\, T\, V$, dove V è una trasformazione lineare qualunque e T è una trasformazione U. Sarà $W^2 = V^{-1} T\, V\, V^{-1} T\, V = V^{-1}\, T^2\, V$ e in generale $W^k = V^{-1}\, T^k\, V$. Se M è una costante abbastanza grande, i coefficienti di V e di V^{-1} sono in modulo minori di M, i coefficienti di T^k sono in modulo minori di $M\, k^n$. I coefficienti di W^k sono dunque in modulo minori di $\frac{1}{n}\,(n\, M)^3\, k^n = \frac{1}{n}\,(n\, M)^3\, e^{n \log k}$.

(*) Infatti, se $x'_i = \sum_k a_{ik}\, x_k$, $x'_i = \sum_k b_{ik}\, x_k$ sono due tali trasformazioni, il loro prodotto sarà definito dalle $x'_i = \sum_k \alpha_{ik}\, x_k$, dove $\alpha_{ik} = \sum_k a_{ik}\, b_{kh}$. Se M_1, M_2 sono costanti tali che mod $a_{ik} < M_1$, mod $b_{ik} < M_2$ per $i, h = 1, 2, \ldots, n$, avremo che mod $\alpha_{ik} < n\, M_1\, M_2$. La formola del testo è dunque dimostrata per $k = 2$. Dimostriamo che, se detta formola vale per $k = 1, 2, \ldots\, \sigma - 1$, essa vale anche per $k = \sigma$. Infatti

$$T_1\, T_2 \ldots\, T_{\sigma-1}\, T_\sigma = (T_1 \ldots\, T_{\sigma-1})\; T_\sigma .$$

Se i coefficienti di T_i $(i = 1, 2, \ldots\, \sigma)$ sono in modulo minori di M_i, i coefficienti di $T_1\, T_2 \ldots\, T_{\sigma-1}$ sono minori (perchè, per ipotesi, il teorema vale per $k = \sigma - 1$) di $n^{\sigma-2}\, M_1\, M_2 \ldots M_{\sigma-1}$. E, poichè il nostro teorema è già dimostrato per $k = 2$, i coefficienti del prodotto delle trasformazioni $T_1\, T_2 \ldots\, T_{\sigma-1}$ e T_σ saranno in modulo minori di $n\,(n^{\sigma-2}\, M_1\, M_2 \ldots\, M_{\sigma-1})\, M_\sigma = n^{\sigma-1}\, M_1\, M_2 \ldots\, M_\sigma$.

(**) Infatti, se la trasformazione T è definita dalle $x'_i = \sum_h a_{ih}\, x_h$, $(i, h = 1, 2, \ldots\, n)$ si avrà $|\, a_{ii} \,| = 1$, $a_{ih} = 0$, se $h > i$, o se $h < i - 1$. La T^k sia definita dalle $x'_i = \sum_h a_{ih}^{(k)}\, x_h$. Avremo

$$a_{ih}^{(k)} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_{k-1}} a_{i i_1}\, a_{i_1 i_2} \cdots\, a_{i_{k-1} h}$$

dove la sommatoria si dovrebbe estendere a tutti i sistemi di valori di $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ $(1 \leq i_s \leq n)$ $(s = 1, 2, \ldots, k - 1)$.

Ma ricordiamo le ipotesi fatte sui coefficienti a_{ih} della T. Riconosceremo tosto che:

Sia ora dato un prodotto $W = T_1^{k_1} T^{k_2} \dots T_\rho^{k_\rho}$, dove le T sono trasformazioni lineari, le k sono interi positivi. Tra i ρ fattori $T_i^{k_i}$ ve ne siano h, che indicheremo con $T_{i_1}^{m_1}, T_{i_2}^{m_2}, \dots, T_{i_h}^{m_h}$ (dove con $i_1, i_2 \dots i_h$ indico h interi inferiori a ρ, e dove si è posto $m_s = k_{i_s}$ per $s = 1, 2, \dots, h$) tali che le corrispondenti trasformazioni T_{i_s} siano trasformazioni del tipo $V_{i_s}^{-1} T_s' V_{i_s}$, dove V_{i_s} è una trasformazione lineare qualunque, e T'_s è una trasformazione lineare U. Potremo trovare, per quanto abbiamo già detto, una costante $M > 1$ così grande che i coefficienti di $T_{i_s}^{m_s}$ siano inferiori a $\frac{1}{n}(n M)^3 k_{i_s}^n$. Uno dei residui $\rho - h$ fattori del nostro

---

1. se $h > i$, o se $k < i - h$ i termini della nostra sommatoria sono tutti nulli.

2. se $h = i$, un solo termine della nostra sommatoria è differente da zero.

3. se $k = i - s$ $(1 < s \leq i - 1)$ e $k > s - 1$ il numero dei termini della nostra sommatoria, che sono differenti da zero, è al più uguale a

$$\binom{k}{i-h} = \binom{k}{s} = \frac{k(k-1)\dots(k-s+1)}{1.\ 2\dots s}$$

Poichè $i \leq n$, $h < n$, la nostra sommatoria non contiene ***in alcun caso*** più di k^n termini differenti da zero. Studiamo uno di questi termini. Esso è un prodotto di k fattori del tipo

$$a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{k-1} i_k}$$

dove, per simmetria, si è posto $i = i_0$, $h = i_k$. La successione

$$i_0\ i_1 \dots i_k$$

gode delle seguenti proprietà:

1. I numeri i sono interi positivi non nulli.
2. Il numero i_0 non è maggiore di n.
3. Ogni numero i_s $(1 < s < k)$, o è uguale a i_{s-1} oppure a $i_{s-1}1$.

Esisteranno quindi *al più* $n - 1$ valori di s, tali che

$$i_s = i_{s-1}1$$

così che $| a_{i_s i_{s-1}} |$ possa essere differente da 1. Per tutti gli altri valori di s è

$$i_s = i_{s-1} \qquad \text{e quindi} \qquad | a_{i_s i_{s-1}} | = 1$$

Se dunque $M > 1$ è una costante positiva così grande che $\sqrt[n-1]{M}$ sia in modulo maggiore di $a_{i, i-1}$ per tutti i valori di $i < n$, ogni termine non nullo della nostra solita sommatoria è in modulo minore di M. Quindi la nostra solita sommatoria, ossia $a_{ih}^{(k)}$, è in modulo minore di $M k^n$.

prodotto è una trasformazione del tipo $T_\lambda^{k_\lambda}$ ($\lambda \leq \rho$; $\lambda \neq i_1, i_2, \ldots, i_h$). Se M è maggiore del modulo di tutti i coefficienti di queste trasformazioni T, i coefficienti di $T_\lambda^{k_\lambda}$ sono in modulo inferiori a $\frac{1}{n}(n\, M)^{k_\lambda}$. Indichiamo con λ_t ($t = 1, 2, \ldots, \rho - h$) i $\rho - h$ possibili valori di λ. I coefficienti del prodotto W saranno dunque in modulo inferiori a $n^{\rho-1}\, n^{2h}\, M^{3h}\, e^{n \sum_{s=1}^{h} \log k_{i_s}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\rho-h} (n\, M)^{\sum_t k_{\lambda_t}}$.

Se $h \leq q$, $\sum_{s=1}^{h} \log k_{i_s} \leq L$, $\sum_{t=1}^{\rho-h} k_{\lambda_t} \leq H$, questi coefficienti saranno in modulo inferiori a $n^{3q-1}\, M^{3q}\, e^{nL} (n\, M)^H = \frac{1}{n}(n\, M)^{3q+H}\, e^{nL}$. Se $q = 0$, evidentemente si può porre $L = 0$.

§ 2. — Gruppi.

Noi diremo che un insieme G di più trasformazioni S, in numero finito o infinito, è (costituisce, genera) un *gruppo*, quando siano soddisfatte le seguenti proprietà:

1.° Se G contiene una trasformazione S, esso contiene anche la trasformazione inversa S^{-1}.

2.° Se due trasformazioni S, T, distinte o no, sono contenute in G, allora G contiene anche il loro prodotto $S\,T$.

Ne segue tosto:

α) Se G è un gruppo di trasformazioni, esso contiene la trasformazione identica. Infatti sia S una trasformazione di G; G conterrà anche la S^{-1}, e quindi anche il loro prodotto $S\,S^{-1} = 1$.

β) È poi evidente che se $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sono n trasformazioni di G, allora G conterrà anche la trasformazione $S_1\, S_2 \ldots S_n$. In particolare, se S è una trasformazione di G, allora G conterrà tutte le trasformazioni S^a, qualunque sia l'intero positivo a; e, poichè, se un gruppo contiene una trasformazione, esso contiene anche la trasformazione inversa, G conterrà tutte le trasformazioni S^a, qualunque sia l'intero a, positivo o negativo.

Se T è la trasformazione identica, $T^{-1} = T$, $T^2 = T$; quindi la trasformazione identica T costituisce, da sè sola, un gruppo.

Viceversa, se un gruppo contiene una sola trasformazione, questa è la trasformazione identica (per l'osservazione α).

Se $x'_i = Sx_i$ è una trasformazione generica di un gruppo, e se dalla

$$\varphi\,(x_1\, x_2 \ldots .\, x_n) = 0,$$

dove φ è una particolare funzione delle x, segue

$$\varphi\,(Sx_1, Sx_2, \ldots ., Sx_n) = 0,$$

noi diremo che il gruppo ***trasforma in sé l'equazione*** $\varphi\,(x_1 \ldots . x_n) = 0$.

Noi distingueremo tre categorie di gruppi:

1.° gruppi che contengono un numero finito m di trasformazioni distinte. Questi gruppi si diranno ***gruppi discontinui finiti.*** Il numero m si dice ***ordine del gruppo.***

2.° gruppi formati da un insieme infinito, ma numerabile, di trasformazioni distinte T_1, T_2, T_3, ... Questi gruppi si diranno ***gruppi discontinui infiniti.***

3.° gruppi generati da un insieme infinito non numerabile di trasformazioni.

Di questi ultimi gruppi noi considereremo specialmente una classe particolare: la classe dei ***gruppi continui finiti,*** che a loro volta distingueremo in due categorie.

3a) ***Gruppi continui finiti a una schiera di trasformazioni.*** — Le trasformazioni di uno di questi gruppi G sono del tipo:

$$(4) \quad x'_i = f_i\,(x_1, x_2, \ldots ., x_n;\ a_1, a_2, \ldots .\, a_r) \quad (i = 1, 2, \ldots\, n)$$

(r, n interi positivi finiti)

dove le f_i sono funzioni delle n variabili x e di r parametri a. Si suppone che, mentre le a variano in un certo campo, la trasformazione definita dalle (4) generi il gruppo G; in altre parole che ogni trasformazione di G sia determinata, dando nelle (4) ai parametri a dei valori scelti in un certo campo. Di più supporremo che a valori distinti delle a corrispondano trasformazioni distinte. E diremo allora che il gruppo G ha r parametri essenziali, o anche che G è un gruppo a r parametri. Coi simboli G_r, Γ_r .... indicheremo dei gruppi ad r parametri. Questi

gruppi si dicono gruppi continui finiti, perchè da una trasformazione di essi si può passare a un'altra trasformazione qualunque dello stesso gruppo, facendo variare con ***continuità*** un numero ***finito*** di parametri $a_1, a_2, \dots a_r$.

3*b*) ***Gruppi continui finiti con un numero finito di schiere di trasformazioni.*** — Siano date le k trasformazioni:

$$
\begin{array}{ll}
x'_i = f_{1i}(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1 \dots a_r) & (i = 1, 2, \dots, n) \\
x'_i = f_{2i}(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1 \dots a_r) & (i = 1, 2, \dots n) \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\
x'_i = f_{ki}(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1 \dots a_r) & (i = 1, 2, \dots, n)
\end{array}
$$

dove le f_{si} ($s = 1, 2, \dots, k$; $i = 1, 2, \dots n$) sono funzioni delle variabili x e dei parametri a. E supponiamo che, al variare dei parametri a in un certo campo, si ottenga un insieme di trasformazioni, che sia proprio un gruppo. Noi diremo che questo gruppo è un gruppo continuo finito a più schiere (di trasformazioni).

Queste definizioni riusciranno più chiare, esaminando qualche esempio speciale:

I). Le m trasformazioni $x' = e^{\frac{2k\pi i}{m}} x$, dove m è un intero fisso, e k è un intero che può assumere uno dei valori $1, 2, 3, \dots, m$ costituiscono un gruppo discontinuo finito.

II). Le trasformazioni $x' = x + n$, dove n è un intero qualunque ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) costituiscono un gruppo discontinuo infinito.

III). Le trasformazioni $x' = x + a$, dove a è un parametro variabile da $-\infty$ a $+\infty$, costituiscono un gruppo G_1 continuo finito a un parametro, con una sola schiera di trasformazioni.

IV). Le trasformazioni

$$x' = x + a \qquad\qquad x' = -x + a,$$

dove a è un parametro variabile da $-\infty$ a $+\infty$, generano un gruppo continuo finito con due schiere di trasformazioni.

V). Le proiettività di un piano in sè stesso e così pure i movimenti dell'ordinario spazio euclideo generano dei gruppi continui finiti.

§ 3. — Definizioni e teoremi varii.

Tra i gruppi *discontinui* meritano un cenno speciale i gruppi *ciclici:* i gruppi cioè, che sono formati dalle potenze di una trasformazione T. Tali sono ad esempio i gruppi I e II del § 2; i quali sono formati rispettivamente dalle potenze della trasformazione $x' = e^{\frac{2\pi i}{m}} x$ e della trasformazione $x' = x + 1$. Se due potenze diverse T^p, T^q $(p \neq q)$ della T sono distinte, il gruppo conterrà infinite trasformazioni e sarà un gruppo ciclico infinito; se invece due potenze diverse T^p, T^q $(p \neq q)$ sono uguali, allora $T^{p-q} = 1$. Detto k il minimo intero positivo non nullo, per cui è verificata la $T^k = 1$, le trasformazioni $T^0 = 1, T, T^2, \ldots, T^{k-1}$ sono tutte distinte. E una trasformazione T^p, dove p è un intero qualunque, è uguale a T^s $(0 \leq s < k - 1)$, se s è quell'intero positivo o nullo, inferiore a k, che soddisfa alla $p - s \equiv 0 \pmod k$. Il gruppo ciclico G, generato dalla T, è quindi un gruppo discontinuo di ordine k. Il numero k si dice anche: *periodo* della trasformazione T. Se una trasformazione T genera un gruppo ciclico discontinuo infinito, si suol dire che essa è *aperiodica* oppure che essa ha un *periodo infinito.*

Due enti, equivalenti tra loro rispetto a una trasformazione di un gruppo G (§ 1) si diranno anche *equivalenti rispetto a G.*

Noi diremo che una trasformazione di un gruppo è *eccezionale,* se essa è permutabile con tutte le trasformazioni del gruppo.

Se noi abbiamo un gruppo G, formato da certe trasformazioni T, e se noi trasformiamo ciascuna di queste mediante un'altra trasformazione U fissa, ossia se costruiamo le $U^{-1}\, T\, U$, l'insieme γ di queste ultime trasformazioni è un gruppo, che noi diremo *simile* a G, o, più precisamente, *trasformato di G mediante la U,* e che noi indicheremo con $U^{-1}\, G\, U$.

Per dimostrare che γ è un gruppo, si osservi che, se T è una trasformazione di G, il gruppo G contiene anche la trasforma-

zione inversa T^{-1}; quindi, se l'insieme γ contiene la trasformazione $M = U^{-1}\ T\ U$, esso contiene anche la $N = U^{-1}\ T^{-1}\ U$, che (§ 1) è la trasformazione inversa di M.

Così pure, se G contiene due trasformazioni T', T'', e se $T'\ T'' = T'''$, allora G contiene anche T'''. Siano M', M'' le trasformazioni $U^{-1}\ T'\ U$, $U^{-1}\ T''\ U$ di γ, corrispondenti alle T', T''. Il prodotto $M'\ M''$ è (§ 1) uguale alla trasformata mediante U della trasformazione T''' di G; quindi γ contiene anche $M'\ M''$. Ossia, se γ contiene due trasformazioni M', M'', esso contiene anche il loro prodotto. Tanto basta per concludere che γ è un gruppo.

Sottogruppi. — Se Γ è un gruppo, le cui trasformazioni sono tutte trasformazioni di un altro gruppo G, si suol dire che Γ è un ***sottogruppo*** di G. Così p. es. il gruppo formato dalle traslazioni nell'ordinario spazio euclideo è un sottogruppo del gruppo formato da tutti i movimenti euclidei.

Tra i sottogruppi di un gruppo G si può considerare anche il gruppo G stesso.

Se S è una trasformazione di G, il gruppo ciclico generato dalle potenze della S è un sottogruppo di G; se poi $S = 1$, allora, poichè tutte le potenze di S sono ancora uguali all'identità, il sottogruppo in discorso è formato dalla sola trasformazione identica.

Se Γ è un sottogruppo di G, e U è una trasformazione qualunque di G, il gruppo $U^{-1}\ \Gamma\ U$, trasformato di Γ mediante la U, è ancora un sottogruppo di G. Infatti ogni sua trasformazione è prodotto della U^{-1}, di una trasformazione di Γ, e della trasformazione U: ossia è prodotto di tre trasformazioni di G, e quindi appartiene a G. Due sottogruppi Γ, $U^{-1}\ \Gamma\ U$ di G si dicono ***sottogruppi equivalenti.*** Se un sottogruppo Γ di G coincide con tutti i sottogruppi equivalenti, esso si dice un ***sottogruppo eccezionale*** (invariante) di G. Il gruppo G stesso, e il gruppo formato dalla sola trasformazione identica si possono, come abbiamo visto, considerare sempre come sottogruppi di G: essi sono anzi sottogruppi eccezionali di G.

Supponiamo che G sia un gruppo discontinuo; ne sia Γ un sottogruppo, il quale sarà pure necessariamente un gruppo discontinuo. Indichiamo con $1, \tau_1, \tau_2, \tau_3 \ldots.$ le trasformazioni di Γ; supposto $\Gamma \neq G$, indichiamo con U_1 una trasformazione di G, distinta da tutte le trasformazioni di Γ: e costruiamo tutte le trasformazioni

$$U_1,\ U_1\tau_1,\ U_1\tau_2,\ U_1\tau_3 \ldots.$$

Queste trasformazioni sono evidentemente tutte distinte. Esse sono pure distinte dalle precedenti; infatti se fosse $U_1\tau_i = \tau_k$, sarebbe $U_1 = \tau_k\tau_i^{-1}$, e quindi U_1, essendo uguale al prodotto di due trasformazioni di Γ, sarebbe uguale a una trasformazione di Γ, contro il supposto.

Se le trasformazioni τ, $U_1\tau$ non esauriscono ancora le trasformazioni di G, consideriamo una trasformazione U_2 di G, distinta dalle trasformazioni precedentemente considerate. E formiamo tutte le trasformazioni $U_2, U_2\tau_1, U_2\tau_2 \ldots.$ Si dimostra c. s. che queste trasformazioni sono tutte distinte fra di loro e sono pure distinte dalle $1, \tau_1, \tau_2 \ldots.$, e dalle $U_1, U_1\tau_1, U_1\tau_2 \ldots.$ Così potremo poi continuare: cioè, se le trasformazioni τ, $U_1\tau$, $U_2\tau$ non esauriscono le trasformazioni di G, sceglieremo una trasformazione U_3 di G, da quelle distinta, costruendo poi le trasformazioni $U_3, U_3\tau_1, U_3\tau_2 \ldots.$ e così via. Potranno avvenire due casi: o che il procedimento a un certo punto finisca (ciò che avviene certamente, se G è finito), oppure che esso si possa continuare indefinitamente. Nel primo caso esisteranno certe trasformazioni in numero finito $U_1, U_2, \ldots, U_{m-1}$ tali che le trasformazioni del seguente quadro

$$\begin{array}{lllll}
1 & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \ldots. \\
U_1 & U_1\tau_1 & U_1\tau_2 & U_1\tau_3 & \ldots. \\
U_2 & U_2\tau_1 & U_2\tau_2 & U_2\tau_3 & \ldots. \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
U_{m-1} & U_{m-1}\tau_2 & U_{m-1}\tau_2 & U_{m-1}\tau_3 & \ldots.
\end{array}$$

sono tutte distinte tra loro ed esauriscono tutte le trasformazioni di G. Il numero m si dice indice di Γ in G. (Se G conte-

nesse un numero finito p di trasformazioni, Γ conterrebbe $\frac{p}{m}$ trasformazioni: *l'ordine $\frac{p}{m}$ di un sottogruppo Γ di un gruppo G finito discontinuo di ordine p è sempre dunque un divisore di p*).

Se invece il procedimento più sopra esposto si può proseguire indefinitamente, si suol dire che Γ è in G un sottogruppo di indice infinito.

Isomorfismo di due gruppi. — Due gruppi G, Γ si dicono in *isomorfismo oloedrico*, se le loro trasformazioni si possono porre in corrispondenza biunivoca, in guisa che al prodotto $T' T''$ di due trasformazioni T', T'' di G (che per definizione è una trasformazione di G) corrisponda proprio quella trasformazione $\tau' \tau''$ di Γ, che è prodotto di quelle trasformazioni τ', τ'' di Γ, che corrispondono rispettivamente alle trasformazioni T', T'' di G.

In particolare se T, τ sono due trasformazioni corrispondenti di G, Γ, alla trasformazione T^p di G (p intero positivo) corrisponderà la trasformazione τ^p di Γ. Alla trasformazione $S = T^p T^{-m} = T^{p-m}$ di G (p, m interi positivi qualunque) corrisponderà una trasformazione σ di Γ; e poichè $S T^m = T^p$, sarà $\sigma \tau^m = \tau^p$; quindi $\sigma = \tau^{p-m}$. Quindi alla T^a (a intero positivo, nullo, o negativo) corrisponderà la τ^a. E in particolare alla T^0, ossia alla trasformazione identica di G, corrisponderà la τ^0, ossia la trasformazione identica di Γ.

A trasformazioni permutabili in G corrisponderanno trasformazioni permutabili in Γ; a una trasformazione eccezionale di G corrisponderà una trasformazione eccezionale di Γ.

Alle trasformazioni di un sottogruppo (di indice p) di G corrisponderanno le trasformazioni di un sottogruppo (di indice p) di Γ.

Un gruppo G è sempre oloedricamente isomorfo a sè stesso.

Due gruppi G, Γ si dicono *meriedricamente isomorfi*, se a ogni trasformazione di G corrisponde una trasformazione di Γ, a ogni trasformazione di Γ corrispondono più trasformazioni (in numero finito o infinito) di G, in guisa che a una trasformazione di G, che è prodotto di due trasformazioni T', T'' di G, corrisponda quella trasformazione di Γ, che è prodotto delle due trasformazioni corrispondenti alle T', T''.

Siano S, T due trasformazioni di G, a cui corrisponde in Γ la trasformazione identica $\tau = 1$; allora al prodotto $S\,T$ corrisponde in Γ la $\tau\tau = \tau^2 = 1$: ossia alla $S\,T$ corrisponde in Γ ancora l'identità. Si dimostra come sopra che alla trasformazione identica in G corrisponde la trasformazione identica in Γ. Se σ è la trasformazione di Γ, che corrisponde alla trasformazione S^{-1} di G, allora, poichè $S\,S^{-1} = 1$, sarà $\tau\sigma = 1$, e, poichè $\tau = 1$, anche $\sigma = 1$. Quindi anche alla trasformazione S^{-1} di G corrisponde in Γ la trasformazione identica.

Da quanto abbiamo detto risulta dunque:

Le trasformazioni di G, a cui corrisponde in Γ l'identità, formano un gruppo G^1, che sarà un sottogruppo di G.

Se U è una trasformazione di G, e S una di G^1, e se u è la trasformazione di Γ, corrispondente alla U, è ben chiaro che alla trasformazione $U^{-1}\,S\,U$ di G corrisponde la $u^{-1}.\,1.\,u = u^{-1}\,u = 1$ di Γ. Quindi la trasformazione $U^{-1}\,S\,U$ appartiene a G^1: ossia:

Il sottogruppo G^1 di G è un sottogruppo eccezionale.

Le proprietà trovate più sopra per i gruppi oloedricamente isomorfi valgono, con poche modificazioni, anche per i gruppi meriedricamente isomorfi.

§ 4. — Classi speciali di gruppi.

Siano $T_1, T_2, \ldots. T_k$ k trasformazioni, operanti rispettivamente sulle variabili $x_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n_1)$, $x_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n_2)$, ... $x_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n_k)$ ($n_1, n_2, \ldots, n_k$ numeri interi). Le $x_i^{(k)}$ siano $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ variabili distinte e indipendenti. In tal caso il considerare il prodotto T delle trasformazioni $T_1, T_2, \ldots, T_k$ è perfettamente equivalente al considerare l'insieme delle trasformazioni $T_1, T_2, \ldots, T_k$ come un'unica trasformazione, operante sul complesso di tutte le variabili x. La trasformazione T si dirà trasformazione *mista*, o *totale*, risultante delle trasformazioni *parziali* $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Sia ora G un gruppo, di cui

ogni trasformazione T sia una trasformazione mista, le cui trasformazioni parziali T_s operino rispettivamente sulle variabili $x_i^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots. k)$ $(i = 1, 2, \ldots, n_s)$. Il gruppo G si dirà **gruppo *misto*** o ***totale***. Ciascuna delle trasformazioni parziali T_s genererà un gruppo G_s di trasformazioni sulle variabili $x^{(s)}$. Questi gruppi G_s si diranno gruppi ***parziali***.

Si dice ***gruppo lineare su n variabili*** $x_1 \ldots. x_n$ un gruppo, di cui ogni trasformazione è una trasformazione lineare, ossia è una trasformazione del tipo seguente:

$$x'_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k + a_i}{\sum_{k=1}^{n} b_k\, x_k + b} \qquad (a, b = cost.) \qquad (i = 1, 2, \ldots. n)$$

Così si dirà gruppo lineare misto su $\sum_{i=1}^{k} n_i$ variabili $x_s^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k;\ s = 1, 2, \ldots, n_i)$ un gruppo misto, i cui gruppi parziali corrispondenti sono rispettivamente un gruppo lineare sulle $x^{(1)}$, sulle $x^{(2)}$, ecc. Ogni trasformazione di un gruppo lineare misto è quindi del tipo:

$$x_s^{(i)\prime} = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} a_{i;\,s\,k}\, x_k^{(i)} + a_{is}}{\sum_{k=1}^{n_i} b_{ik}\, x_k^{(i)} + b_i} \quad (a, b = cost.: i = 1, 2, \ldots, k; s = 1, 2, \ldots, n_i)$$

Un gruppo lineare si dice intero omogeneo, se le sue trasformazioni sono lineari intere omogenee, ossia sono del tipo $x'_i = \sum_k a_{ik}\, x_k$.

D'ora in poi, se con A indichiamo una quantità, con A^0, o con A_0 indicheremo la quantità immaginaria coniugata. E supporremo sempre che, se delle variabili x subiscono una trasformazione lineare P, le variabili immaginarie coniugate x_0 subiscano quella trasformazione lineare P_0, i cui coefficienti sono immaginarii coniugati dei coefficienti omologhi della P.

Un gruppo G lineare intero omogeneo si chiamerà ***gruppo iperfuchsiano intero,*** se ogni sua trasformazione P trasforma in

sè una forma Hermitiana, cioè una forma del tipo: $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k^0$, dove le a sono costanti tali che $a_{ik} = a_{ki}^0$. (Secondo la precedente convenzione, con x_i^0 e con a_{ik}^0 indico le quantità immaginarie coniugate delle x_i e delle a_{ik}, e suppongo che, mentre le x subiscono una trasformazione generica P di G, le x^0 subiscono la P_0). Occorre notare che una forma Hermitiana ha sempre valori reali qualunque siano i valori che si attribuiscono alle variabili x_i.

Posto $y_i = \frac{x_i}{x_n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, e $n - 1 = m$, il gruppo G individua un gruppo lineare fratto Γ sulle $y_1 \ldots y_m$, che trasforma in sè stessa l'equazione:

$$(5) \qquad \sum_{i,k=1}^{m} \beta_{ik}\, y_i\, y_k^0 + \sum \beta_i\, y_i + \sum \beta_i^0\, y_i^0 + \beta = 0$$

dove $\beta_{ik} = a_{ik}$, $\beta_i = a_{i,m+1}$, $\beta = a_{m+1,m+1}$. Le costanti β sono costanti legate dalla $\beta_{ik} = \beta_{ki}^0$, $\beta = \beta_0$, e quindi ancora il primo membro della (5) è sempre reale, quando alle y, y^0 si dieno valori immaginarii coniugati. Questi gruppi Γ si chiameranno gruppi iperfuchsiani fratti, o più brevemente senz'altro ***gruppi iperfuchsiani.***

Un gruppo iperfuchsiano è trasformato in un gruppo iperfuchsiano (simile), se noi trasformiamo le variabili y con una qualsiasi trasformazione lineare.

Nel seguito noi intenderemo però di riferirci a una classe particolare di gruppi iperfuchsiani, che è la più importante, per le applicazioni che abbiamo in vista: un gruppo di tale classe si può, con una trasformazione lineare sulle y, trasformare in un gruppo tale che la corrispondente equazione (5) assuma la forma:

$$(5)' \qquad y_1\, y_1^0 + \ldots + y_m\, y_m^0 \pm 1 = 0.$$

Un gruppo lineare misto, i cui gruppi parziali sono gruppi iperfuchsiani, si dice ***gruppo iperfuchsiano misto.***

§ 5. — Le trasformazioni infinitesime.

D'ora in poi useremo spesso un linguaggio geometrico. Quando avremo cioè n variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, considereremo queste variabili come coordinate in uno spazio a n dimensioni S_n. Un sistema di valori delle x ci individuerà un punto di S_n: i punti di S_n le cui coordinate soddisfano a $n-1$, $n-2$, $n-3, \ldots, 1$ equazioni indipendenti si diranno formare una linea, una superficie, una varietà a 3, a 4, ..., a $n-1$ dimensioni, contenuta in S_n (subordinata di S_n). Una trasformazione

$$x'_i = f_i(x_1 \ldots . x_n)$$

si potrà considerare come una corrispondenza stabilita tra i punti di coordinate x_i, e i punti (trasformati) di coordinate $x'_i = f_i$.

Se G è un gruppo ***discontinuo,*** noi diremo che esso contiene delle trasformazioni infinitamente poco differenti dall'identità, o più brevemente delle ***trasformazioni infinitesime,*** quando, per ogni numero ε positivo non nullo, piccolo a piacere, si può trovare una trasformazione ***non identica*** $x'_i = f_i(x_1 \ldots . x_n)$ del gruppo G, tale che sia

$$| x'_i - x_i | < \varepsilon \qquad (*)$$

per tutti i punti x, per cui sono definite le nostre trasformazioni, esclusi al più con intorni piccoli a piacere un numero finito di punti singolari isolati, i punti di qualche linea, superficie, varietà singolare a 3, 4 .... $n-1$ dimensioni.

Per es. consideriamo il gruppo ciclico G generato dalle potenze della trasformazione

$$x' = e^{i\alpha} x,$$

(*) Come al solito, se A è una quantità qualunque, con $| A |$ indichiamo il suo valore assoluto, o il suo modulo; poichè con $A^0 (A_0)$ intendiamo la quantità immaginaria coniugata di A, sarà $|A|^2 = A\, A_0$.

dove α è un numero reale, il cui rapporto con π è irrazionale. Consideriamo la x come variabile complessa, e rappresentiamola, al solito modo di GAUSS, su un piano σ. Il gruppo G è definito per tutti i punti di σ. Escludiamo in σ il punto (singolare) $x = \infty$ con un intorno ***arbitrario***, ossia consideriamo una ***qualunque*** regione di σ, posta a distanza finita. Sia R una costante maggiore del massimo modulo di x in questa regione.

Una trasformazione di G è del tipo: $x' = e^{mi\alpha} x$, dove m è un qualunque intero; cosicchè sarà nella nostra regione

$$| x' - x | = | e^{mi\alpha} - 1 | \ | x | < | e^{mi\alpha} - 1 | \ R.$$

Essendo $\frac{\alpha}{\pi}$ irrazionale, io potrò scegliere l'intero m in guisa che $m\alpha$ sia così prossimo a un multiplo di 2π, che si abbia:

$| e^{mi\alpha} - 1 | < \frac{\varepsilon}{R}$ (ε costante positiva piccola a piacere)

e quindi

$$| x' - x | < \varepsilon.$$

Tanto basta per affermare che G contiene trasformazioni infinitesime.

Per brevità, con l'abbreviazione *g. d. p. d. t. i.* intenderemo la frase: «*gruppo discontinuo privo di trasformazioni infinitesime*».

In senso analogo, ma ***ben distinto***, noi parleremo delle ***trasformazioni infinitesime*** di un gruppo G ***continuo*** finito. Siano (4) le equazioni definenti le trasformazioni di un tal gruppo G, che supponiamo a una sola schiera di trasformazioni. Poichè G contiene la trasformazione identica, esisteranno dei valori a'_i dei parametri a_i tali che per $a_i = a'_i$ sia $f_i = x_i$. Noi chiameremo trasformazione infinitesima del gruppo una trasformazione (4), in cui i valori dei parametri a_i differiscono di una quantità infinitesima dalle a'_i. In altre parole chiameremo trasformazioni infinitesime di G quelle, che si ottengono ponendo in (4) $a_i = a'_i + b_i t$, dove le b_i sono costanti arbitrarie, e t è una quantità, che varia tendendo al limite zero.

Le trasformazioni (4) si possono scrivere per questi valori dei parametri nel modo seguente:

$$x'_i = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n\, a'_1 \dots a'_r) + t \sum_{s=1}^{r} b_s \frac{\partial f_i(x_1 \dots x_n\, a'_1 \dots a'_r)}{\partial a'_s} + t^2 M_i$$

$$= x_i + t \sum_{s=1}^{r} b_s \left[\frac{\partial f_i(x_1 \dots x_n\, a_1 \dots a_r)}{\partial a_s}\right]_{a_h = a'_h} + t^2 M_i,$$

dove le M_i sono quantità finite. La differenza $x'_i - x_i$ è perciò, a meno di infinitesimi del secondo ordine, data dalle:

$$x'_i - x_i = t \sum_s b_s \left[\frac{\partial f_i(x_1 \dots x_n\, a_1 \dots a_r)}{\partial a_s}\right]_{a_h = a'_h}.$$

Il secondo membro di questa uguaglianza si può dire rappresenti l'incremento δx_i, che la x_i riceve per una trasformazione infinitesima del nostro gruppo. Sia ora U una funzione qualunque delle x; noi indicheremo con δU la differenza

$$U(x'_1 \dots x'_n) - U(x_1 \dots x_n),$$

la quale a sua volta, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore, è data da:

$$\delta U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i = t \sum_{s,i} b_s \left\{ \frac{\partial U}{\partial x_i} \left[\frac{\partial f_i(x_1 \dots x_n\, a_1 \dots a_r)}{\partial a_s}\right]_{a = a'} \right\}.$$

Posto $\left[\frac{\partial f_i(x_1 \dots x_n\, a_1 \dots a_r)}{\partial a_s}\right]_{a = a'} = \xi_{si}(x_1, \dots x_n)$ avremo infine

$$\delta U = t \sum_s b_s \left[\xi_{s1} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \xi_{s2} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \dots + \xi_{sn} \frac{\partial U}{\partial x_n}\right].$$

Noi esprimeremo questa uguaglianza dicendo che il simbolo

$$X = \sum_{s=1}^{r} b_s \sum_{i=1}^{n} \xi_{si} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

rappresenta una ***trasformazione infinitesima generica del gruppo***, e identificheremo spesso, per brevità di discorso, una tale trasformazione col simbolo che la rappresenta.

Se qualunque sia la funzione U, si ha $\delta U = 0$, ossia se

$$\sum_{s=1}^{r} b_s \xi_{si} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

si dice che X è identicamente nullo. Il Lie ha dimostrato che,

nelle nostre ipotesi, ciò avviene soltanto se $b_s = 0$ $(s = 1, 2, \dots r)$. Osserviamo ora che si può scrivere:

$$X = \sum_s b_s X_s,$$

dove è $X_s = \sum_i \xi_{si} \frac{\partial}{\partial x_i}$; X_s è cioè quella espressione che si deduce da X, ponendovi $b_1 = b_2 = \dots = b_{s-1} = b_{s+1} = \dots = b_n = 0$, $b_s = 1$.

Le X_s si dicono essere le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo G, e il gruppo G si dice generato dalle X_s: ogni altra trasformazione infinitesima del gruppo G è una combinazione lineare a coefficienti costanti delle trasformazioni X_s. Tale denominazione è legittimata dal fatto che il Lie ha dimostrato che *il gruppo continuo G è completamente individuato dalle sue trasformazioni infinitesime.*

Se G fosse un gruppo a un parametro, $(r = 1)$ esso sarebbe generato da *una sola* trasformazione infinitesima, la quale è allora individuata a meno di un fattore costante.

Se una trasformazione S trasforma il gruppo continuo G in un gruppo (simile) Γ, essa porta le trasformazioni infinitesime X_s $(s = 1, 2, \dots, r)$ di G nelle trasformazioni infinitesime di Γ (*).

Se una funzione U resta invariata per tutte le trasformazioni del gruppo G, allora chiaramente

$$X_s U = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, r).$$

(*) Diciamo che la trasformazione S, definita dalle

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

porta la trasformazione infinitesima $\sum_s \xi_s \frac{\partial}{\partial x_s}$ nella $\sum_s \eta_s \frac{\partial}{\partial y_s}$, dove $\eta_s = \sum_i \xi_i \frac{\partial y_s}{\partial x_i}$. Scrivendo rispettivamente le ξ_s ed η_s come funzioni delle x, o delle y, la uguaglianza $\sum_s \xi_s \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = \sum_s \eta_s \frac{\partial \varphi}{\partial y_s}$ si riduce a un'identità, qualunque sia la φ, in conseguenza delle equazioni definenti la S, quando nel calcolarne il primo, o il secondo membro si considerino rispettivamente le x, o le y come variabili indipendenti.

Viceversa io dico che, *se una funzione U soddisfa a un' equazione*

$$X U = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0,$$

essa resta invariata almeno per le trasformazioni di un gruppo continuo Γ a un parametro, che è generato dalla trasformazione infinitesima $X = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Si possono infatti scegliere sempre n nuove variabili indipendenti $y_1, y_2, \ldots, y_n$, tali che si abbia identicamente:

$$X = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Basta prendere la y_1 in guisa che

$$X y_1 = \sum \xi_i \frac{\partial y_1}{\partial x_i} = 1,$$

e scegliere per $y_2, \ldots, y_n$ $n - 1$ integrali indipendenti dell'equazione

$$X y = \sum_i \xi_i \frac{\partial y}{\partial x_i} = 0.$$

Sarà appunto identicamente:

$$X = \sum_{i,i} \xi_i \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

La U, considerata come funzione delle y, soddisferà alla $XU = \frac{\partial U}{\partial y_1} = 0$, e quindi sarà indipendente da y_1. Se noi dunque poniamo al posto delle y_i le

$$y'_1 = y_1 + a; \; y'_2 = y_2; \; y'_3 = y_3; \; \ldots; \; y'_n = y_n; \qquad (6)$$

dove a è un parametro qualunque, la U resta trasformata in sè stessa. Ora le (6) individuano una trasformazione T, che, al variare del parametro a, genera evidentemente un gruppo Γ' a un parametro sulle variabili y, il quale è generato appunto dalla trasformazione infinitesima $\frac{\partial}{\partial y_1}$.

Ora le x sono legate alle y da certe equazioni:

$$x_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

le quali individuano una certa trasformazione S. Potremo (§ 1) scrivere $x_i = Sy_i$, $y_i = S^{-1} x_i$. Porremo poi

$$x'_i = Sy'_i = f_i (y'_1, y'_2, y'_3 \dots y'_n) = f_i (y_1 + a, y_2, \dots y_n) = S\,Ty_i.$$

Eliminando le y, troveremo delle equazioni:

$$x'_i = \varphi_i (x_1, x_2, \dots, x_n) = S\,T\,Sx_i^1,$$

le quali (§ 3) definiscono un gruppo Γ, simile al gruppo Γ'.

È poi evidente che la U, pensata di nuovo come funzione delle x, resta invariata per le trasformazioni di Γ. Ed è pure ben chiaro, per quanto si è detto più sopra, che Γ è generato dalla trasformazione infinitesima

$$X = \sum_1^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Osservazione. — Dal teorema di LIE, che un gruppo è individuato dalle sue trasformazioni infinitesime, scende che Γ è completamente individuato dalla X.

Questi concetti sono fondamentali nella teoria dei gruppi continui (di S. LIE). Noi non abbiamo bisogno di approfondirli (*): e ci basterà richiamare l'attenzione sulla profonda differenza, che passa tra le proprietà delle trasformazioni infinitesime di un gruppo discontinuo, e quelle delle trasformazioni infinitesime di un gruppo continuo. Quando avremo bisogno di distinguere, chiameremo trasformazioni infinitesime di S. LIE le trasformazioni infinitesime di un gruppo continuo, trasformazioni infinitesime di KLEIN quelle di un gruppo discontinuo.

(*) Il lettore potrà consultare l'opera classica di LIE ed ENGEL sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni e specialmente il primo volume, oppure le lezioni (litografate) del Prof. LUIGI BIANCHI, o quelle del Prof. ERNESTO PASCAL, pubblicate nei « Manuali Hoepli ».

Capitolo Secondo. — **Metriche e movimenti.**

§ 6. — **Definizioni fondamentali.**

Se con x, y, z indichiamo coordinate cartesiane ortogonali nello spazio ordinario, è ben noto che la lunghezza di una linea(*) rettificabile L è data dall'integrale curvilineo

$$\int_L \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2}$$

esteso alla stessa linea L (**).

Perciò la forma differenziale quadratica

$$d\,s^2 = d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2$$

si chiama *elemento lineare* della geometria euclidea, in quanto che essa basta a definire la lunghezza di una linea qualunque. L'elemento lineare è, per così dire, uguale al quadrato della distanza dei due punti

$$(x,\, y,\, z) \qquad (x + d\,x,\, y + d\,y,\, z + d\,z)$$

infinitamente vicini. Questa forma dell'elemento lineare dipende essenzialmente dal teorema di Pitagora, che a sua volta si deduce dai postulati della geometria Euclidea.

Viceversa si può dimostrare che basta ammettere detta forma di elemento lineare, perchè se ne possa dedurre tutta la geometria metrica di Euclide (che talvolta si chiama anche *geometria piana*, o *geometria a curvatura costante nulla*).

(*) Una linea si dà, come è noto, ponendo le coordinate x, y, z funzioni di una variabile indipendente t: noi supporremo sempre che queste funzioni abbiano derivate prime continue: ed, ove sia necessario, anche quelle altre derivate che occorrerà considerare. Sotto queste condizioni è noto che la linea è rettificabile.

(**) Con la parola *linea* noi intenderemo tanto i pezzi (i segmenti, gli archi) di una curva, quanto la curva completa. Non vi ha possibilità alcuna di equivoco.

Di più detta forma dell'elemento lineare euclideo vale, come è noto, soltanto nell'ipotesi che x, y, z siano coordinate cartesiane ortogonali. Se noi usassimo coordinate curvilinee qualunque, legate alle x, y, z da equazioni del tipo

$$x = x(\rho_1, \rho_2, \rho_3),$$
$$y = y(\rho_1, \rho_2, \rho_3),$$
$$z = z(\rho_1, \rho_2, \rho_3),$$

l'elemento lineare nelle nuove variabili sarebbe quello, che si deduce dal precedente, ponendo $d\,x = \sum_i \frac{\partial x}{\partial \rho_i}\, d\,\rho_i$, ecc. Tutti gli elementi lineari, che così si possono ottenere, sono *equivalenti* (*): essi definiscono tutti la stessa geometria (Euclidea).

Se noi non ammettessimo il postulato euclideo delle rette parallele, e supponessimo invece che per un punto A passino infinite rette, complanari con una data retta r, ma non intersecanti la r, si potrebbe ancora sviluppare una metrica. Essa non sarebbe più la geometria di Euclide, ma una geometria ben distinta: la ben nota geometria di Bólyai-Lobacefskij, detta talvolta *geometria iperbolica* o anche *geometria a curvatura costante negativa.*

Scegliendo opportunamente il sistema di coordinate, troveremmo che la lunghezza di una linea L sarebbe data dall'integrale

$$h \int_L \sqrt{\frac{d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2}{y^2}} \qquad (h = \text{cost.})$$

(*) Com'è noto, due forme differenziali

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_m} a_{i_1 i_2 \ldots i_m}\, dx_{i_1}\, dx_{i_2} \ldots dx_{i_m}, \qquad \sum_{i_1 i_2 \ldots i_m} b_{i_1 i_2 \ldots i_m}\, dy_{i_1}\, dy_{i_2} \ldots dy_{i_m}$$

(dove tanto che x, che le y formano un sistema di n variabili indipendenti, le $a_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ sono funzioni delle x, le $b_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ delle y) si dicono equivalenti, se da una si passa all'altra mediante una trasformazione

$$x_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$d\,x_i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial y_k}\, d\,y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

esteso alla data linea L. L'elemento lineare sarebbe in questo caso

$$d s^2 = h^2 \frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{y^2}.$$

E viceversa si può dimostrare che basta ammettere questa forma di elemento lineare, per poterne senz'altro dedurre tutta la geometria di Bólyai. Naturalmente si sarebbe condotti alla stessa geometria, se, anzichè partire dal detto elemento lineare, noi partissimo da un qualunque elemento lineare equivalente.

Ma potremmo mutare i postulati della geometria elementare per modo che la retta appaia come una linea chiusa (di lunghezza finita): due punti A, B su di essa non determinano allora un verso $A B$, nè si può parlare di rette complanari parallele. Si ottiene allora una nuova geometria: la geometria di Riemann, detta anche ***geometria ellittica*** o ***a curvatura costante positiva.*** Con una opportuna scelta di coordinate, noi troveremmo per essa l'elemento lineare

$$d s^2 = h^2 \frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} \quad (h = \text{cost.}).$$

E viceversa, partendo da questo elemento lineare, o da un elemento lineare equivalente, potremmo costruire tutta la geometria di Riemann.

Tutte queste geometrie sono casi particolari di un'intera classe di geometrie, che si possono così definire. Sia

$$\sum_{i,k} a_{ik}\, d x_i\, d x_k \; (i, k = 1, 2, \ldots, n) \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

una qualsiasi forma differenziale quadratica nelle x; le a_{ik} siano funzioni finite e continue delle x in un certo campo, le quali ammettano inoltre tutte quelle derivate che in seguito ci occorreranno. Immaginiamo uno spazio ad n dimensioni i cui punti si possano determinare mediante le variabili x assunte come variabili coordinate: e consideriamo di esso quella sola regione in cui sono soddisfatte le ora ricordate condizioni di continuità e derivabilità per le a_{ik}.

Definiamo come lunghezza di una linea L in questo spazio il valore dell'integrale

$$(7) \qquad \int_L \sqrt{\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k}$$

esteso alla stessa linea L. Assumiamo cioè la data forma quadratica come *elemento lineare* dello spazio considerato. Avremo così definito in questo spazio un sistema di misure, o, come si suol dire, una *metrica,* da cui potremmo partire per edificare una geometria metrica in questo spazio.

La geometria, che così otterremo, sarà proprio l'usuale geometria euclidea, se il nostro elemento lineare è la forma $\Sigma\, dx_i^2$, oppure una forma equivalente; in generale invece otterremo una geometria, affatto distinta dalla geometria euclidea.

Tra le questioni più importanti, che si presentano in queste geometrie generali, noi ne ricorderemo due.

La prima si riferisce alle linee geodetiche, e si può enunciare così:

Dati due punti A, B si trovi una linea, che passi per A e B, e la cui lunghezza sia minore della lunghezza di ogni altra linea, che congiunga i punti A, B.

Una tale linea si dirà *linea geodetica;* la determinazione delle linee geodetiche è un problema, che tratta coi metodi del calcolo delle variazioni. E si trova:

Una linea geodetica L è in generale determinata univocamente, quando si dia un suo punto x'_i, e la direzione di L in detto punto. (Questa direzione, com'è noto, si determina, dando i rapporti dei differenziali $d\,x_i$ per $x_i = x'_i$).

Una linea geodetica L è determinata univocamente, quando si dieno due punti A, B di L abbastanza vicini.

Prima di passare alla seconda questione, di cui vogliamo far cenno, dobbiamo premettere una definizione:

Una trasformazione $x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ si dice essere un mo-

rimento per una assegnata metrica, se essa non altera le lunghezze, ossia se essa porta una qualsiasi linea L in una linea L' di uguale lunghezza.

Se $a_{ik} = a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, noi porremo

$$a'_{ik} = a_{ik}(x'_1, \ldots, x'_n)$$

La nostra trasformazione sarà un movimento, allora e allora soltanto che l'uguaglianza

$$\Sigma\, a_{ik}\, d\,x_i\, d\,x_k = \Sigma\, a'_{ik}\, d\,x'_i\, d\,x'_k$$

è una conseguenza delle formole, che definiscono la trasformazione.

In altre parole ***i movimenti sono le trasformazioni, che lasciano invariante*** (trasformano in sè stesso) ***il nostro elemento lineare.***

La questione, che ci possiamo porre, è la seguente:

Definita una metrica mediante il suo elemento lineare trovare:

1. ***se esistono dei movimenti per tale metrica,***

2. ***determinare in caso affermativo tutti questi movimenti.***

Così p. es., se $n = 3$, e se l'elemento lineare è l'elemento euclideo $d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2$, le uniche trasformazioni, che lo lasciano invariante, sono gli ordinarii movimenti della geometria elementare, e i cosidetti movimenti di seconda specie, (prodotti di un movimento vero e proprio per una simmetria), i quali differiscono dai precedenti per il fatto che, pur conservando le distanze, portano un triedro in un altro triedro uguale, ma generalmente non sovrapponibile al primo.

La definizione analitica di questi movimenti è:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z + a_1 \\ y' &= a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z + a_2 \\ z' &= a_{31}\,x + a_{32}\,z + a_{33}\,z + a_3 \end{aligned}$$

dove le a_i, a_{ik} sono costanti, legate dalla condizione che il determinante delle a_{ik} sia ortogonale. Secondo che questo determinante è uguale a $+1$, o a -1, il movimento è di prima, o di seconda specie.

Tutti questi movimenti dello spazio euclideo formano un gruppo continuo finito a sei parametri, a due schiere di trasfor-

esteso alla linea stessa. Queste metriche, o, come diremo talvolta, queste *ipermetriche* coincidono con le precedenti, nel caso che $m = 2$.

Anche ora, se vogliamo supporre la metrica *reale,* dovremo ammettere che F_m sia una forma definita positiva dei differenziali dx, e in particolare quindi che m sia pari.

Metriche miste. — Siano ora date più metriche definite rispettivamente dagli elementi lineari $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tali che le variabili, da cui dipende uno qualunque di questi elementi lineari siano affatto distinte e indipendenti dalle variabili, da cui dipendono gli altri $k - 1$ elementi lineari. Se le forme differenziali $A_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ sono dello stesso grado, l'elemento lineare

$$A = \sum_i \lambda_i A_i \; (\lambda_i = \text{cost.})$$

definisce una nuova metrica, che è certamente reale, se le forme $A_1 \ldots A_k$ sono forme definite positive e le λ sono costanti positive. Questa metrica si dirà una metrica *mista* o *totale;* le metriche definite dagli elementi lineari A_i si diranno metriche *parziali.*

Siano ora $G_1, G_2, \ldots, G_k$ dei gruppi di movimenti rispettivamente nelle metriche definite dalle $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Le variabili su cui opera G_i saranno quelle stesse, da cui dipende la forma A_i. Un gruppo misto (§ 4) G, i cui gruppi parziali sieno rispettivamente dei sottogruppi di $G_1, G_2, \ldots, G_k$, o eventualmente coincidano con $G_1, G_2, \ldots, G_k$, è evidentemente un gruppo di movimenti nella metrica mista definita dall'elemento lineare A.

Volume in una metrica. — Sia $\sum a_{ik} \, dx_i \, dx_k \; (i, k = 1, 2, \ldots, n)$ l'elemento lineare definente una certa metrica in uno spazio S. Con $| a_{ik} |$ noi indicheremo il determinante delle a_{ik} (*discriminante* della metrica): ciò non può portare ambiguità con la notazione usata per indicare il modulo di una quantità. Sia R una regione

dove con OC, OD indico la lunghezza degli archi OC, OD delle due curve, i quali diventano infinitesimi dello stesso ordine, e con CD la lunghezza dell'arco di geodetica CD.

In una metrica generale, alla parola ***angolo di due linee*** noi non abbiamo dato finora un significato preciso. E se noi vogliamo conservare l'analogia con lo spazio euclideo, potremo assumere la seguente ***definizione:***

Angolo φ di due linee L, L' uscenti da un punto O è quello, che è dato dalla formola precedente, dove con C, D indico due punti, scelti uno su ciascuna delle linee L, L', i quali si fanno tendere al punto O come punto limite.

L'angolo così definito resta determinato a meno del segno e a meno di multipli di 2π. Per calcolarlo, useremo senz'altro, per brevità, il metodo infinitesimale.

Se $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ è l'elemento lineare della nostra metrica e x_i, $x_i + dx_i$, $x_i + \delta x_i$ sono le coordinate del punto O, e dei punti C, D, che si possono supporre infinitamente vicini ad O, allora avremo, a meno di infinitesimi di ordine superiore,

$$\begin{aligned} OC^2 &= \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \\ OD^2 &= \Sigma a_{ik}\, \delta x_i\, \delta x_k, \\ CD^2 &= \Sigma a_{ik}\, (dx_i - \delta x_i)(dx_k - \delta x_k), \end{aligned}$$

quando con a_{ik} si indichino i valori delle a_{ik} nel punto O (*) e quindi sarà

$$\cos\varphi = \frac{\sum a_{ik}\, dx_i\, \delta x_k}{\sqrt{\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k}\ \sqrt{\sum a_{ik}\, \delta x_i\, \delta x_k}}.$$

Dalla formola precedente si deduce tosto che l'angolo di due direzioni non muta, se si moltiplica l'elemento lineare per un

---

(*) Nell'ultima di queste tre uguaglianze con a_{ik} noi dovremmo intendere i valori delle a_{ik} nel punto D. Se però, come supponemmo, le a_{ik} sono continue in O, noi possiamo anche nella terza formola, come nelle precedenti, indicare con a_{ik} i valori delle a_{ik} nel punto O. Gli infinitesimi così trascurati sono infinitesimi di ordine superiore.

qualsiasi fattore finito M, funzione di $x_1\, x_2 \ldots . x_n$, ossia se si assume

$$M \Sigma a_{ik}\, d\, x_i\, d\, x_k$$

come elemento lineare.

Se due spazii, in ciascuno dei quali è definita una metrica, sono in una corrispondenza biunivoca, che conserva gli angoli, si dice che i due spazii sono in *corrispondenza conforme.* In particolare dunque uno spazio, il cui elemento lineare è del tipo

$$M\ \Sigma\ d\, x_i^2$$

è in corrispondenza conforme con lo spazio euclideo, il cui elemento lineare è $\Sigma\ d\, x_i^2$, quando si considerano come omologhi i punti di uguali coordinate.

Osservazione. — I *movimenti* in una data metrica conservano evidentemente non solo le lunghezze, ma anche le geodetiche, gli angoli, i volumi.

Osservazione. — Talvolta le variabili x, da cui dipende l'elemento lineare di una metrica, non si assumono come indipendenti; e si suppone invece che esse siano legate da un certo numero di relazioni finite. Naturalmente si suppone allora che i differenziali $d\, x_i$ siano legati dalle relazioni che si ottengono differenziando quelle assegnate nelle x. Le considerazioni su svolte per l'angolo di due direzioni, e la formola sopra trovata continuano a valere anche in questo caso più generale.

§ 7. — Classi particolari di metriche.

Questo paragrafo è dedicato allo studio di alcune relazioni, che passano tra i gruppi di movimenti in certe metriche speciali, e i gruppi di trasformazioni lineari intere omogenee su n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, che noi potremo considerare come coordinate omogenee in uno spazio lineare S.

Noi studieremo dapprima un caso particolare, che ci servirà come preparazione allo studio del caso più generale.

Sia G un gruppo di trasformazioni lineari intere omogenee sulle x_i, *le quali trasformino in sè stessa una forma* $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di grado m nelle stesse variabili. Siano y_i e z_i due sistemi di variabili *cogredienti* al sistema delle x_i: p. es. le coordinate di due punti qualunque in S. Avremo evidentemente che

$$V(\lambda y'_i + \mu z'_i) = V(\lambda y_i + \mu z_i),$$

se dalle y e dalle z si passa alle y', z' precisamente mediante una stessa di quelle trasformazioni, che mutano in sè stessa la forma V. E di più la precedente uguaglianza sarà identica nei parametri λ, μ. Se ordiniamo ciascuno dei due membri secondo le potenze di μ, e paragoniamo poi i coefficienti di μ^s $(s = 0, 1, \ldots, m)$, otterremo:

$$\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + z_n \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^s V(y_1, \ldots, y_n) =$$
$$= \left(z'_1 \frac{\partial}{\partial y'_1} + \ldots + z'_n \frac{\partial}{\partial y'_n}\right)^s V(y'_1, \ldots, y'_n).$$

Indicando i due membri di questa uguaglianza rispettivamente coi simboli $F_s(z_i; y_i)$ e $F_s(z'_i; y'_i)$, potremo scrivere la seguente identità

$$F_s(z_i; y_i) = F_s(z'_i; y'_i).$$

Osserviamo ora che i differenziali dx_i formano un sistema di variabili cogrediente al sistema delle variabili x_i; cosicchè dalla detta uguaglianza deduciamo in particolare:

$$F_s(d x_i; x_i) = F_s(d x'_i; x'_i)$$
$$(s = 0, 1, \ldots m).$$

Dunque *l'espressione* $F_s(d x_i; x_i)$, *che è una forma differenziale di grado* s, *è trasformata in sè stessa dalle trasformazioni del gruppo* G.

Noi potremo ora fissare il fattore di proporzionalità per le coordinate omogenee x_i di un punto generico dello spazio S in guisa che la forma $V(x_1, \ldots x_n)$ acquisti un certo valore costante K non nullo: poichè le trasformazioni di G non mutano la forma V, le quantità x'_i, trasformate delle x per una trasfor-

mazione di G, soddisferanno ancora alla stessa relazione $V(x') = K$. Dalla relazione $V(x) = K$ si deduca il valore di una delle x, (p. es. della x_1) in funzione delle altre variabili x (delle $x_2, x_3, \ldots, x_n$), che noi potremo riguardare come variabili indipendenti. Sostituendo poi nella $F_s(x_i; dx_i)$ alla x_1 e alla dx_1 i valori che se ne ricavano in funzione delle $x_2, \ldots, x_n, dx_2, \ldots, dx_n$, otterremo una forma differenziale Φ_s dello stesso grado in $n - 1$ variabili affatto indipendenti.

Una trasformazione di G dà luogo così ad una trasformazione sulle sole variabili $x_2, \ldots x_n$. E queste trasformazioni formano chiaramente un gruppo Γ isomorfo a G (oloedricamente o meriedricamente). Per il teorema precedente ***le trasformazioni di*** Γ ***trasformano in sè stesse le forme*** Φ_s. ***Il gruppo*** Γ ***è dunque un gruppo di movimenti nella metrica, che si definisce assumendo una di queste forme*** Φ_s, moltiplicata per una qualsiasi costante h, ***come elemento lineare.***

Noi abbiamo qui assunto le $x_2, x_3, \ldots, x_n$ come variabili indipendenti: si potrebbero però assumere invece a variabili indipendenti le $\xi_i = \frac{x_i}{x_n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$. Con questa scelta delle variabili indipendenti abbiamo il vantaggio che il gruppo G diventa un gruppo di trasformazioni ***ancora lineari*** (ma ***fratte***) sulle variabili indipendenti ξ_i.

Ma ora ci chiediamo: quando mai la metrica, così definita, è ***reale?*** ossia: quando la forma $h\,\Phi_s$ è una forma ***definita e positiva?*** Ciò avviene allora e allora soltanto che $h\,\Phi_s$ sia sempre reale e maggiore di zero per valori reali delle $x_2, \ldots, x_n$, e per valori reali non contemporaneamente nulli dei differenziali dx. Ma ora ricordiamo che $h\,\Phi_s = h\,F_s$, quando si suppongano le x legate dalla

$$V(x) = K,$$

e i differenziali dx legati dall'unica relazione (che si ottiene differenziando la $V = K$)

$$dV = \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\, dx_i = F_1(dx; x) = 0.$$

La forma $h\,\Phi_s$ sarà dunque una forma definita positiva, se la forma $h\,F_s$ assume soltanto valori reali e positivi per valori reali delle x_i, e per valori reali non tutti nulli dei differenziali $d x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, soddisfacenti alle precedenti equazioni. Ciò avviene (tutt'al più mutando il segno di h) soltanto quando sono soddisfatte le seguenti condizioni: la forma V sia a coefficienti reali; s sia un intero pari; la forma $F_s(z; x)$ non si annulli mai per valori reali delle x_i e per valori reali, non tutti nulli delle z, soddisfacenti alle due equazioni:

$$V(x_i) = K \qquad \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} z_i = F_1(z; x) = 0.$$

Queste equazioni si deducono da quelle scritte più sopra, ponendo z_i al posto dei differenziali $d\,x_i$.

In altre parole le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la metrica considerata sia reale sono le seguenti:

I. *La forma V sia a coefficienti reali*,

II. *s sia pari* (p. es. $s = 2\,t$),

III. *le varietà $F_s(z; x) = 0$, $F_1(z; x) = 0$* (dove si considerino le z come coordinate correnti) ***non abbiano punti reali comuni.***

Questa ultima condizione si può interpretare geometricamente nel seguente modo, appena si ricordi che $F_s(z; x) = 0$ rappresenta la $(m - s)^{\text{esima}}$ varietà polare del punto (x) rispetto alla varietà $V = 0$.

La forma $F_{2t}(d\,x; x)$, considerata come elemento lineare, definisce una metrica reale soltanto in quella regione (se pure esiste) ***dello spazio ambiente, i cui punti godono della proprietà che il loro iperpiano polare e la loro $(m - 2\,t)^{\text{esima}}$ varietà polare rispetto alla ipersuperficie $V = 0$ non hanno punti reali comuni.***

Se m è pari, possiamo anche porre $t = \dfrac{m}{2}$, intendendo, in modo conforme alle nostre convenzioni, che $F_m(z; x)$ sia proporzionale a $V(z)$, ossia che la ipersuperficie $V = 0$ sia la zero-esima varietà polare di un punto qualunque rispetto alla stessa ipersuperficie $V = 0$. Questo fatto ci interessa specialmente nel

caso che $m = 2$, ossia nel caso che V sia una forma di secondo grado. Le metriche corrispondenti sono, come vedremo più avanti, le metriche a curvatura costante, che abbiamo già citato al § 6. Intendendo che le x siano variabili legate da una relazione

$$V(x) = \sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, x_k = K \quad (a_{ik},\ K = \text{cost.})$$

dette metriche sono definite da un elemento lineare $h\, V(dx)$, dove h è una costante.

Insieme alle metriche ora citate, noi ne possiamo trovare altre, per cui il gruppo G è ancora un gruppo di movimenti. Le forme $F_s\,(z;\, x)$ sono forme, la cui proprietà essenziale dal nostro punto di vista è quella di essere trasformate in sè stesse da ogni trasformazione lineare che muta in sè stessa la forma V, appena si considerino le z, x come variabili cogredienti.

Se $L\,(z;\, x)$ è una qualunque forma, che gode di questa proprietà, allora evidentemente il gruppo G si potrà considerare come gruppo di movimenti della metrica, definita assumendo $h\, L\,(dx;\, x)$ ($h =$ cost.) come elemento lineare, e intendendo che le x siano variabili legate dalla relazione $V(x) = K$. Questa metrica sarà, come precedentemente, reale (se L ha coefficienti reali e se il grado di L nelle variabili z è un numero pari) in tutta quella regione dello spazio ambiente (ammesso che una tal regione esista), *i cui punti x godono della proprietà che le ipersuperficie*

$$L\,(z;\, x) = 0, \qquad \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\, z_i = 0$$

(dove le z siano le coordinate correnti) *non hanno punti reali comuni.*

Osserviamo che facilmente possiamo determinare alcune forme $L\,(z;\, x)$ trasformate in sè da ogni trasformazione di G. Tale è p. es. la forma, che, uguagliata a zero, rappresenta (se si considerano le z come coordinate correnti) il cono proiettante da un punto x l'intersezione di due varietà polari dello stesso punto x rispetto alla $V = 0$. Se il grado di questo cono è pari, e se esso oltre al punto x non contiene alcun altro punto reale, almeno

quando il punto x si trova in una certa regione R dello spazio ambiente, allora la nostra metrica si potrà supporre reale in R.

Applicheremo ora i risultati testè ottenuti ai gruppi Γ di trasformazioni lineari intere omogenee reali su n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, che al solito potremo considerare come coordinate omogenee in uno spazio Σ, per il caso che non si sappia se il gruppo Γ considerato trasforma o non trasforma in sè stessa una forma V delle variabili x.

Noi supporremo senz' altro che ogni trasformazione di Γ sia unimodulare, ossia che il determinante formato coi coefficienti di una qualsiasi trasformazione di Γ sia uguale all' unità. In tal caso, se una trasformazione di Γ porta una forma delle variabili x in un' altra, gli invarianti della forma iniziale sono uguali ai corrispondenti della forma trasformata. E in particolare, se la forma iniziale è quadratica, il suo discriminante resta inalterato per tutte le trasformazioni di Γ.

Sia $A = \sum\limits_{i,k} a_{ik}\, d\,x_i\, d\,x_k$ $(a_{ik} = a_{ki})$ la più generale forma quadratica nelle x. Una proiettività di Γ porterà la forma A in una forma $A' = \Sigma\, a'_{ik}\, x_i\, x_k$; i coefficienti a'_{ik} di A' saranno funzioni lineari intere omogenee dei coefficienti a_{ik} di A, e il discriminante $|\, a_{ik}\,|$ di A sarà uguale al discriminante $|\, a'_{ik}\,|$ di A'.

In altre parole, se noi pensiamo i coefficienti a_{ik} come coordinate omogenee di uno spazio S a $\frac{n\,(n+1)}{2} - 1$ dimensioni, allora in questo spazio alle proiettività di Γ corrisponderanno delle proiettività formanti un gruppo G, isomorfo a Γ, il quale ***trasforma in sè stessa la forma*** $V = |\, a_{ik}\,|$ ***delle variabili*** a_{ik}.

Possiamo dunque applicare al gruppo G i risultati precedentemente ottenuti. E in particolare deduciamo che nello spazio S il gruppo G si potrà considerare come gruppo di movimenti per la metrica definita dall' elemento lineare

$$h\, F_2\,(d\,a\,;\,a) = h \sum_{l,m,p,q} \frac{\partial^2\, |\, a_{ik}\,|}{\partial\, a_{lm}\, \partial\, a_{pq}}\; d\,a_{lm}\; d\,a_{pq} \qquad (h = \text{cost.}),$$

quando si immagini che le a_{ik} siano legate da una relazione

$$| a_{ik} | = \text{cost.}$$

È ora importante trovare una regione R di S, in cui questa metrica è reale. Sia A una determinata forma quadratica definita positiva delle x. Ridotta a forma canonica, essa sarà del tipo:

$$a \sum_i x_i^2 \qquad (a = \text{cost.}).$$

Per eseguire la riduzione a forma canonica, si sono trasformate le x con una proiettività *reale* unimodulare, alla quale corrisponde una proiettività reale sulle a_{ik} (in S), che trasforma in sè stessa la forma $V = | a_{ik} |$. Le forme $F_2 (z; a)$, $F_1 (z; a)$ diventano rispettivamente le forme analoghe costruite per la nominata forma canonica; e quindi, a meno di un fattore costante, sono date da:

$$\sum_{i,k} (z_{ii} z_{kk} - z_{ik}^2) = \frac{1}{2} (\sum_i z_{ii})^2 - \frac{1}{2} \sum_i z_{ii}^2 - \sum_{i,k} z_{ik}^2,$$
$$\sum_i z_{ii}.$$

Ponendo $F_1 (z; a) = 0$ l'equazione $F_2 (z; a) = 0$ diventa

$$\frac{1}{2} \sum_i z_{ii}^2 + \sum_{ik} z_{ik}^2 = 0.$$

E, limitandoci a quantità reali, ne deduciamo

$$z_{ii} = z_{kk} = 0.$$

Le varietà $F_1 (z; a) = 0$, $F_2 (z; a) = 0$ non hanno perciò punti reali comuni; e quindi si ha: *Un gruppo qualunque di proiettività reali in uno spazio Σ si può considerare come gruppo di movimenti reali in una metrica esistente in uno spazio S e determinata da una forma quadratica differenziale. Questa metrica è reale in una certa regione R di S. Lo spazio S è quello spazio, i cui punti reali corrispondono biunivocamente alle quadriche dello spazio Σ, che hanno un' equazione a coefficienti reali. La R è quella regione di Σ, i cui punti reali corrispondono ad ellissoidi totalmente immaginarii di Σ* (ma che ciononostante hanno un'equazione a coefficienti reali), ossia a *quadriche, la cui equazione si*

ottiene uguagliando a zero una forma definita delle variabili omogenee coordinate in Σ.

Così p. es., se $n = 2$, al gruppo continuo (a tre parametri) generato da tutte le proiettività reali di una retta in sè stessa, corrisponde una metrica, determinata da un elemento lineare del tipo:

$$(h = \text{cost.}) \qquad h\,(d\,a_{11}\,d\,a_{22} - d\,a_{12}^2)$$

dove a_{11}, a_{22}, a_{12} sono tre variabili legate da una relazione

$$a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22} = \text{cost.}$$

Posto $a_{12} = y_1$, $a_{11} + a_{22} = 2\,y_3$, $a_{11} - a_{22} = 2\,y_2$, le y saranno legate dalla:

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = \text{cost.}$$

e l'elemento lineare in discorso sarà proporzionale a

$$d\,y_1^2 + d\,y_2^2 - d\,y_3^2.$$

Questa metrica, per quanto abbiamo visto, si potrebbe anche dedurre dalla considerazione delle proiettività del piano in sè stesso, che lasciano fissa una forma quadratica $V(y) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. Infatti, con questa definizione di V, si ha

$$\tfrac{1}{2}\,F_2\,(d\,y;\,y) = d\,y_1^2 + d\,y_2^2 - d\,y_3^2.$$

E in modo analogo, ponendo $n = 3, 4, 5, 6 \ldots$ troveremmo che il gruppo formato da tutte le collineazioni reali in uno spazio a $2, 3, 4 \ldots$ dimensioni si può considerare come gruppo di movimenti reali in una metrica reale di uno spazio a $5, 9, 14 \ldots$ dimensioni.

Noi siamo giunti a queste metriche particolari, studiando come un gruppo proiettivo reale su date variabili x trasforma le forme quadratiche nelle variabili x; a gruppi analoghi, ma meno semplici, giungeremmo studiando come sono trasformate le forme V di grado qualunque nelle x. L'ufficio, che nelle precedenti ricerche aveva il discriminante $|\,a_{ik}\,|$ sarebbe compiuto da un qualsiasi invariante delle V. Non importa neanche di conside-

rare tutte le forme V di uno stesso grado. Basta limitarci a considerare un sistema di forme V, tale che ogni proiettività di G muti una forma del sistema in un'altra forma del sistema stesso.

Di questo principio generale faremo ora una applicazione specialmente importante. Sia Γ un gruppo qualunque di trasformazioni lineari omogenee unimodulari complesse su n variabili $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Potremmo applicare a Γ le precedenti considerazioni; ma con ciò dovremmo nel caso attuale ricorrere a metriche non reali. L'inconveniente si evita p. es. nel seguente modo: consideriamo l'insieme delle forme Hermitiane $V = \Sigma a_{ik} \xi_i \xi_k^0$, dove $a_{ik} = a_{ki}^0$, e dove con a_{ik}^0, ξ_k^0 indichiamo le quantità immaginarie coniugate delle a_{ik}, ξ_k, conformemente a una convenzione già fatta (§ 4, pag. 15). Il sistema di tali forme V, considerate come forme quadratiche della parte reale e della immaginaria delle variabili ξ, gode precisamente della proprietà, cui più sopra accennammo; che cioè ogni proiettività di Γ, considerata come una trasformazione lineare sulla parte reale e sulla parte immaginaria delle ξ, trasforma ogni forma del tipo precedente in una forma dello stesso tipo.

Prendiamo ora come coordinate omogenee (in uno spazio S a $n^2 - 1$ dimensioni) precisamente le a_{ii} (che son tutte reali, perchè $a_{ii} = a_{ii}^0$) e le $\dfrac{a_{ik} + a_{ki}}{2}$, $\dfrac{a_{ik} - a_{ki}}{2i}$ (che sono pure reali, poichè $a_{ik} = a_{ki}^0$). In questo spazio S noi otteniamo un gruppo G di proiettività reali che lascia fissa la forma $V = | a_{ik} |$. Se ne deduce, c. s., che nello spazio S noi otteniamo così un gruppo di movimenti in una metrica *reale* in quella regione R di S, i cui punti sono immagine di forme definite.

In particolare, se $n = 2$, noi otteniamo un gruppo di proiettività in uno spazio a $4 - 1 = 3$ dimensioni, il quale lascia ivi fissa la ipersuperficie

$$a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} = 0.$$

Posto $a_{11} = x_1$, $a_{22} = x_2$, $a_{12} = x_3 + i\, x_4$, $a_{21} = x_3 - i\, x_4$,

l'equazione di questa ipersuperficie diventa

$$x_1 x_2 - (x_3^2 + x_4^2) = 0.$$

Poichè x_1, x_2, x_3, x_4 si devono intendere come coordinate *reali*, questa è precisamente una quadrica reale W. Il nostro gruppo diventa così un gruppo di movimenti per la metrica determinata da $h\,(dx_1\,dx_2 - dx_3^2 - dx_4^2)$ (h = cost.) dove le x_i sono variabili legate dalla relazione

$$x_1 x_2 - x_3^2 - x_4^2 = \text{cost.}$$

E questa metrica è *reale*, se si dà ad h un segno opportuno, in quella regione di S_4 formata dai punti interni alla quadrica W.

Questa metrica, per quanto abbiamo visto nella prima parte del presente paragrafo, si potrebbe anche dedurre dalla considerazione di quelle proiettività dello spazio, che trasformano in sè la forma quadrica

$$V = x_1 x_2 - x_3^2 - x_4^2.$$

In tal caso è infatti

$$\tfrac{1}{2} F_2\,(dx; x) = dx_1\,dx_2 - d\,x_3^2 - dx_4^2.$$

In modo analogo, ponendo $n = 3, 4, \ldots.$, troveremmo che il gruppo formato da tutte le collineazioni complesse in uno spazio a 2, 3, ... dimensioni, si può considerare come gruppo di movimenti reali in una metrica reale di uno spazio a 8, 15 .... dimensioni.

§ 8. — I gruppi iperfuchsiani.

Nell'ultima parte del precedente paragrafo abbiamo studiato i gruppi più generali di trasformazioni lineari intere omogenee su n variabili, a coefficienti *reali* o *complessi*. Nella prima parte abbiamo studiato il caso particolare di un gruppo G di trasformazioni cosifatte, il quale trasformi in sè stessa una forma $V(x_1, x_2, \ldots., x_n)$. E abbiamo visto che, se le trasformazioni di G sono *reali*, esse si possono considerare come movimenti *reali* in una metrica, in cui sono variabili coordinate le $\frac{x_i}{x_n}$ ($i = 1, 2, \ldots., n-1$),

A un risultato analogo vogliamo ora giungere nel caso di gruppi G di trasformazioni lineari intere omogenee, reali o complesse, sulle n variabili x.

Cominceremo dal caso più importante di un gruppo G iperfuchsiano intero, di un gruppo cioè, le cui trasformazioni lasciano invariante una forma Hermitiana

$$\Sigma\, a_{ii}\, x_i\, x_i^{\circ} \qquad (a_{ii} = a_{ii}^{\circ}).$$

Sia P una trasformazione generica del gruppo G. Se le y_i sono un sistema di variabili cogredienti alle x, allora, quando le x_i subiscono una trasformazione P di G, le y_i° subiscono la trasformazione P_0, i cui coefficienti sono immaginarii coniugati dei coefficienti omologhi della P. Quindi la forma

$$\Sigma\, a_{ii}\, x_i\, y_i^{\circ}$$

resta trasformata in sè stessa. Per simmetria anche la forma $\Sigma\, a_{ii}\, y_i\, x_i^{\circ}$ resta trasformata in sè stessa; e altrettanto avverrà dunque della

$$\Sigma\, a_{ii}\, y_i\, x_i^{\circ}\; \Sigma\, a_{ii}\, x_i\, y_i^{\circ}.$$

Questa espressione è evidentemente ***reale*** per tutti i valori ***reali*** e ***complessi*** delle variabili x, y. Supponiamo che le x, y siano coordinate di due punti dello spazio ambiente; e immaginiamo (in modo analogo a quanto si fece più sopra per le varietà algebriche) che sia

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\, a_{ii}\, x_i\, x_i^{\circ} = K \\ \Sigma\, a_{ii}\, y_i\, y_i^{\circ} = K\end{array}\right\} \quad (K = \text{cost. reale})$$

L'espressione

$$A = h\left(\frac{\Sigma\, a_{ii}\, y_i\, x_i^{\circ}\; \Sigma\, a_{ii}\, x_i\, y_i^{\circ}}{\Sigma\, a_{ii}\, x_i\, x_i^{\circ}\; \Sigma\, a_{ii}\, y_i\, y_i^{\circ}} - 1\right)$$
$$(h = \text{cost. reale})$$

è ***reale*** per tutti i sistemi di valori reali e complessi delle x, y ed è trasformata in sè stessa dalle operazioni di G. Questa espressione è chiaramente omogenea di grado nullo nelle x_i, y_i, x_i°, y_i°: quindi essa è funzione dei soli rapporti

$$\xi_t = \frac{x_t}{x_n}, \quad \zeta_t = \frac{y_t}{y_n} \qquad (t = 1, 2, \ldots\, n-1).$$

e dei rapporti immaginarii coniugati. Posto quindi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_t}{x_n} &= u_t + i\, v_t \\ \frac{y_t}{y_n} &= u_t + i\, v_t \end{aligned}\right\} (t = 1, 2, \ldots, n-1),$$

la espressione A diventa una funzione reale delle u, v, u, v, che noi indicheremo con $A\,(u, v;\, \bar{u}, v)$, e che non muta di valore, scambiando u, v con u, v. Al gruppo G di trasformazioni sulle x corrisponde un gruppo, che indicheremo ancora con G, di trasformazioni lineari fratte sulle ξ, il quale è un gruppo iperfuchsiano (fratto) (§ 4, pag. 16) (*). Il gruppo G individua naturalmente un gruppo, che ancora indicheremo con G, e ancora chiameremo iperfuchsiano (**), di trasformazioni *reali* sulle u, v, le quali lasciano invariata la $A\,(u, v;\, u, v)$.

Se noi supponiamo che le y siano infinitamente vicine alle x, e poniamo $\bar{\xi}_t = \xi_t + d\xi_t$, la

$$h\left\{\frac{\left(\sum_1^{n-1}{}_{it} a_{it}\, \xi_i \xi_t^0 + \sum_1^{n-1}{}_t a_{nt}\, \xi_t^0 + \sum_1^{n-1}{}_t a_{tn}\, \xi_t + a_{nn}\right)\left(\Sigma\, a_{it}\, \xi_i\, \xi_t^0 + \Sigma\, a_{nt}\, \xi_t^0 + \Sigma\, a_{tn}\, \xi_t + a_{nn}\right)}{\left(\Sigma\, a_{it}\, \xi_i\, \xi_t^0 + \Sigma\, a_{nt}\, \xi_t^0 + \Sigma\, a_{tn}\, \xi_t + a_{nn}\right)\left(\Sigma\, a_{it}\, \xi_i\, \xi_t^0 + \Sigma\, a_{nt}\, \xi_t^0 + \Sigma\, a_{tn}\, \xi_t + a_{nn}\right)} - 1\right\}$$

si riduce, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, alla:

$$\frac{a_{it}\xi_t^0\, d\xi_i + \sum_1^{n-1}{}_t a_{tn} d\xi_t\Big)\left(\Sigma\, a_{it}\xi_i d\xi_t^0 + \Sigma a_{nt} d\,\xi_t^0\right) - \Sigma\, a_{it} d\xi_i\, d\xi_t^0\left(\Sigma\, a_{it}\xi_i\xi_t^0 + \Sigma\, a_{nt}\xi_t^0 + \Sigma\, a_{tn}\xi_t + a_{nn}\right)}{\left(\Sigma\, a_{it}\, \xi_i\, \xi_t^0 + \Sigma\, a_{nt}\, \xi_t^0 + \Sigma\, a_{tn}\, \xi_t + a_{nn}\right)^2}$$

che è una forma differenziale quadratica delle $d\xi$, $d\xi^0$.

Ed evidentemente quindi, se noi in $A\,(u, v;\, \bar{u}, \bar{v})$ poniamo $\bar{u} = u + du$, $\bar{v} = v + dv$, la A si riduce a una forma differen-

---

(*) Esso trasforma in sè stessa l'equazione (cfr. formula (5), § 4):

$$\sum_1^{n-1} a_{it}\, \xi_i\, \xi_t^0 + \sum_{t=1}^{n-1} a_{nt}\, \xi_t^0 + \sum_{t=1}^{n-1} a_{nt}^0\, \xi_t + a_{nn} = 0.$$

(**) Ciò non può generare evidentemente alcun errore.

ziale quadratica nei du, dv (a coefficienti *reali*). Noi potremo assumere una tale forma come elemento lineare in una metrica dello spazio a $2(n-1)$ dimensioni, in cui le u, v sono coordinate non omogenee.

Il gruppo G diventa un gruppo di movimenti *reali* in questa metrica.

Per riconoscere poi quando questa metrica è reale, comincieremo coll'osservare che due forme Hermitiane, da una delle quali si passi all'altra mediante una trasformazione lineare sulle variabili indipendenti, definiscono due metriche, i cui elementi lineari sono forme equivalenti; queste metriche sono perciò contemporaneamente reali, o non reali. Di una tale trasformazione lineare ci potremo servire per ridurre la nostra forma Hermitiana $Q = \Sigma a_{ii} x_i x_i^0$ a forma canonica. Per far questo si opererà in modo analogo a quanto si fa per le ordinarie forme quadratiche. Si ha l'identità

$$Q = \sum_1^n a_{ii} x_i x_i^0 = a_{11} y_1 y_1^0 + Q_1$$

dove

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{31}}{a_{11}} x_3 + \ldots + \frac{a_{n1}}{a_{11}} x_n$$

e Q_1 è una forma Hermitiana delle sole $n-1$ variabili $x_2, x_3, \ldots, x_n$, che potremo indicare con $\sum_2^n b_{ii} x_i x_i^0$, dove

$$b_{ii} = a_{ii} - \frac{a_{i1} a_{1i}}{a_{11}} = \frac{a_{ii} a_{11} - a_{i1} a_{1i}}{a_{11}}.$$

Sulla Q_1 potremo usare un procedimento analogo, ponendo

$$Q_2 = b_{22} y_2 y_2^0 + Q_3$$

dove

$$y_2 = x_2 + \frac{b_{32}}{b_{22}} x_3 + \ldots + \frac{b_{n2}}{b_{22}} x_n$$

e Q_3 è una forma delle sole variabili $x_3, x_4, \ldots, x_n$.

Così proseguendo, otterremo infine una formola del tipo:

$$Q = \Sigma\, \alpha_i\, y_i\, y_i^0 \qquad (\alpha = \text{cost.}) \tag{8}$$

dove le y_i sono nuove variabili, legate alle x da una trasformazione lineare unimodulare. In particolare si avrà

$$\alpha_1 = a_{11}\,,\ \alpha_2 = b_{22} = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}{a_{11}}\,,\ \text{ecc.}$$

Affinchè poi Q abbia, per valori non tutti nulli delle variabili indipendenti, sempre uno stesso segno, le α dovranno avere tutte lo stesso segno. E in particolare a_{11} dovrà avere il segno di $\frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}{a_{11}}$. Permutando gli indici 1, 2, ..., n, troveremo che ***affinchè Q abbia sempre uno stesso segno è condizione necessaria che le a_{ii} abbiano tutte uno stesso segno e che le quantità $a_{kk}\, a_{ii} - a_{ik}\, a_{ki}$ siano tutte positive.***

Premesse queste osservazioni, ritorniamo alle nostre metriche. Per quanto abbiamo detto, noi potremo supporre la nostra forma Hermitiana ridotta alla forma canonica (8).

Ponendo $\xi_i = \frac{y_i}{y_n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, l'elemento lineare della metrica corrispondente sarà del tipo:

$$h\frac{\left(\sum_1^{n-1} \alpha_i\, \xi_i^0\, d\,\xi_i\right)\left(\sum_1^{n-1} \alpha_i\, \xi_i\, d\,\xi_i^0\right) - \sum \alpha_i\, d\,\xi_i\, d\,\xi_i^0 \left(\sum_1^{n-1} \alpha_i\, \xi_i\, \xi_i^0 + \alpha_n\right)}{\left(\sum_1^{n-1} \alpha_i\, \xi_i\, \xi_i^0 + \alpha_n\right)^2}\,.$$

Il fatto che nella formola precedente i coefficienti α_i non hanno un ufficio simmetrico dipende da ciò, che noi abbiamo assunto i rapporti $\frac{y_i}{y_n}$ a variabili coordinate. Se noi invece avessimo scelto come variabili coordinate le

$$\frac{y_1}{y_l}\,,\ \frac{y_2}{y_l}\,,\ \ldots,\ \frac{y_{l-1}}{y_l}\,,\ \frac{y_{l+1}}{y_l}\,,\ \ldots,\ \frac{y_n}{y_l} \qquad (l < n),$$

avremmo ottenuto un elemento lineare *equivalente*.

Le metriche definite da tutti questi elementi lineari, che noi diremo metriche *aggiunte* alla metrica sopra definita, sono contemporaneamente reali, o non reali.

Se poi assumiamo nell'elemento lineare sopra scritto come nuove coordinate delle quantità $\lambda_i \xi_i$, dove le λ_i sono opportune costanti, riconosciamo tosto potersi supporre che tutte le α_i siano uguali a ± 1, senza che con ciò si diminuisca la generalità.

Il numeratore dell'elemento lineare sopra scritto è una forma Hermitiana P delle variabili $d\xi_i$; se la metrica, che ne viene definita, è reale, questa forma P deve avere sempre uno stesso segno: il segno di h.

Per i risultati dimostrati più sopra, il prodotto di h per il coefficiente di $d\xi_i \, d\xi_i^0$, cioè la quantità $h\,\alpha_i(\alpha_i \xi_i \xi_i^0 - S)$ (dove si è posto $S = \sum_1^{n-1} \alpha_i \xi_i \xi_i^0 + \alpha_n$) deve essere positiva per $i = 1, 2, ..., n-1$. E le quantità

$$h^2 \alpha_i \alpha_l (\alpha_i \xi_i \xi_i^0 - S)(\alpha_l \xi_l \xi_l^0 - S) - \alpha_i^2 \alpha_l^2 \xi_i^0 \xi_l^0 \xi_l \xi_i =$$
$$= h^2 \alpha_i \alpha_l S (S - \alpha_i \xi_i \xi_i^0 - \alpha_l \xi_l \xi_l^0)$$

dovranno essere tutte positive per $i \neq l$, $i, l = 1, 2, \ldots, n-1$.

Ripetendo ragionamenti analoghi per le metriche aggiunte, che, come sappiamo, sono reali o non reali contemporaneamente alla metrica ora studiata, troviamo che le quantità

$$h\,\alpha_i (\alpha_i \xi_i \xi_i^0 - S), \quad h^2 \alpha_i \alpha_l S (S - \alpha_i \xi_i \xi_i^0 - \alpha_l \xi_l \xi_l^0) \quad (i \neq l)$$

devono essere *tutte* positive per $i, l = 1, 2, \ldots, n$, quando si convenga di porre $\xi_n = \xi_n^0 = 1$.

Poichè il nostro elemento lineare non muta, quando si cambii il segno di *tutte* le α_i, potremo supporre che S sia positivo nel punto $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$, che si considera. Io dico che, ***se due delle*** α, p. es. le α_1, α_2, ***sono positive, anche tutte le altre costanti*** α ***sono positive.*** Se infatti fosse $\alpha_3 < 0$, dai precedenti risultati dedurremmo che le quantità

$$A = S - \alpha_1 \xi_1 \xi_1^0 - \alpha_2 \xi_2 \xi_2^0, \quad B = h(\alpha_1 \xi_1 \xi_1^0 - S), \quad C = h(-\alpha_3 \xi_3 \xi_3^0 + S)$$

debbono essere positive. Dalle due identità

$$B = h\,(-\alpha_2\,\xi_2\,\xi_2^0 - A), \qquad C = h\,(\alpha_1\,\xi_1\,\xi_1^0 + \alpha_2\,\xi_2\,\xi_2^0 - \alpha_3\,\xi_3\,\xi_3^0 + A)$$

si ricaverebbe rispettivamente, ricordando le nostre ipotesi, e ricordando che $A > 0$,

$$h < 0 \qquad\qquad h > 0.$$

La contraddizione ottenuta dimostra il nostro teorema.

La nostra metrica può dunque essere reale soltanto nei seguenti due casi.

1.° Le α hanno tutte lo stesso segno. Potremo supporre che tutte le α siano uguali a $+1$. Dovrà essere $h < 0$. Si verifica facilmente che in tal caso la nostra metrica è reale (*). Essa si dirà ***metrica Hermitiana ellittica.***

2.° Tutte le α, eccetto una, che si potrà supporre essere la α_n, hanno uno stesso segno. Potremo porre

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots = \alpha_{n-1} = -1 \qquad \alpha_n = +1.$$

Per i risultati trovati dovrà essere $h\,(1 - S) > 0$ e quindi $h > 0$. Di più S ed $S + \xi_1\,\xi_1^0 - 1 = -\xi_2\,\xi_2^0 - \ldots\ldots - \xi_{n-1}\,\xi_{n-1}^0$ dovranno avere segno contrario. La nostra metrica è reale quindi al più nella sola regione, in cui

$$-S = \xi_1\,\xi_1^0 + \ldots\ldots + \xi_n\,\xi_n^0 - 1 < 0$$

ossia

$$\sum_{i=1}^{n-1} (u_i^2 + v_i^2) < 1$$

È poi evidente che in questa regione la nostra metrica è proprio reale. Una tale metrica si dirà ***Hermitiana iperbolica.***

Vedremo più avanti che, nel caso $n = 2$, le metriche Hermitiane sono metriche a curvatura costante.

(*) Infatti se α, β, x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots\ldots, n-1)$ sono quantità complesse qualsiasi, si ha:

$$0 \leq \Sigma (x_i\alpha + y_i\beta)(x_i^0\alpha^0 + y_i^0\beta^0) = \alpha\alpha^0\,\Sigma\, x_i x_i^0 + \alpha\beta^0\,\Sigma\, x_i y_i^0 + \alpha^0\beta\,\Sigma\, x_i^0 y + \beta\beta^0\,\Sigma\, y_i y_i^0.$$

Il terzo membro di questa disuguaglianza, che è una forma Hermitiana delle α, β, non è mai negativo. Quindi $\Sigma\, x_i\, x_i^0\, \Sigma\, y_i\, y_i^0 \geq \Sigma\, x_i\, y_i^0\, \Sigma\, x_i^0\, y_i$. Ponendo rispettivamente ξ_i e $d\,\xi_i$ al posto delle x_i, y_i, si deduce la verità dell'affermazione del testo.

Le precedenti considerazioni si possono generalizzare nel modo seguente: Sia dato un gruppo G misto (§ 4) di proiettività, ogni trasformazione del quale sia prodotto di una trasformazione parziale P lineare intera omogenea su certe variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e di un' altra trasformazione *parziale* P_1 lineare intera omogenea su nuove variabili $z_1, z_2, \ldots, z_n$, indipendenti dalle x. Il gruppo G trasformi in sè stesso il polinomio $V(x, z)$, che supponiamo omogeneo e di grado k tanto nelle x, quanto nelle z.

Siano ξ, ζ due nuovi sistemi di variabili cogredienti rispettivamente alle x, z. Il gruppo G trasformerà in sè stessa l'espressione

$$A = \frac{V(x, \zeta)\; V(\xi, z)}{V(x, z)\; V(\xi, \zeta)} - 1 \tag{9}$$

che è una forma di grado zero, tanto nelle x, che nelle ξ, z, ζ, ossia è una funzione dei soli rapporti

$$\frac{x_t}{x_n}, \frac{z_t}{z_n}, \frac{\xi_t}{\xi_n}, \frac{\zeta_t}{\zeta_n} \qquad (t = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Assumiamo i rapporti $\frac{x_t}{x_n}, \frac{z_t}{z_n}$ come coordinate non omogenee

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \qquad w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$$

in uno spazio S a $2(n-1)$ dimensioni.

Se i rapporti $\frac{\xi_t}{\xi_n}, \frac{\zeta_t}{\zeta_n}$ sono infinitamente vicini ai rapporti $\frac{x_t}{x_n}, \frac{z_t}{z_n}$ in guisa che si possa porre:

$$\frac{\xi_t}{\xi_n} = y_t + dy_t \qquad \frac{\zeta_t}{\zeta_n} = w_t + dw_t,$$

allora la A diventa una forma differenziale, che si può assumere come elemento lineare di una metrica. Per questa metrica il gruppo G, considerato come gruppo di trasformazioni sulle y, w, sarà un gruppo di movimenti. L'elemento lineare sarà a coefficienti reali, e il gruppo G sarà un gruppo di trasformazioni reali sulle y, w, se la V è una forma a coefficienti reali, e se le proiettività P, P_1 sono a coefficienti reali.

Se ciò non fosse, supporremo che la forma V non muti di valore, scambiando le x con le z, e mutando ogni coefficiente nella quantità immaginaria coniugata. Supporremo di più che una proiettività P si muti nella corrispondente P_1, quando si sostituiscano le z alle x, e ai coefficienti di P si sostituiscano gli immaginarii coniugati. Si prendano allora in S come coordinate le variabili $u = \frac{y+w}{2}$, $v = \frac{y-w}{2i}$. Tanto l'elemento lineare citato, quanto il gruppo di trasformazioni, indotto da G sulle u, v sono ancora a coefficienti reali. La metrica è poi reale, se l'uguaglianza

$$V(x, \zeta)\; V(\xi, z) = V(x, \xi)\; V(\zeta, z)$$

(dove si suppongano le z, ζ immaginarie coniugate delle x, ξ) è soddisfatta soltanto per $x = \xi$ (e quindi $z = \zeta$), o per valori nulli di tutte le x, o di tutte le ξ.

Capitolo Terzo. — **Le metriche a curvatura costante e le metriche Hermitiane.**

§ 9. — Definizione delle metriche a curvatura costante.

Nel § 7 (pag. 33 e seg.) abbiamo, tra l'altro, visto come da ogni forma algebrica $V(x_1 \ldots . x_n)$ a coefficienti reali si possa partire per definire delle metriche speciali: in particolare si può supporre che V sia di secondo grado. Otteniamo così delle metriche, che hanno ricevuto il nome di *metriche a curvatura costante.* Le metriche di Bólyai e di Riemann (§ 6, pag. 24 e 25) sono (come vedremo al § 10, pag. 54 e 60) appunto metriche a curvatura costante, nel senso testè definito (*).

Secondo tale definizione, partendo dai principii generali esposti al § 7, vediamo che, indicando con V una forma quadratica, le metriche a curvatura costante hanno un elemento lineare del tipo

$$d s^2 = h\, V(d x_1, d x_2, \ldots, d x_n) \qquad (h = \text{cost.})$$

dove le x_i sono coordinate in uno spazio S a $n - 1$ dimensioni legate dalla

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K \qquad (K = \text{cost.})$$

Come abbiamo trovato al § 7 (pag. 39 e seg.), queste metriche hanno per $n = 3$ e per $n = 4$ un'altra importante applicazione. Il gruppo delle proiettività reali (complesse) su una retta, su cui x_1, x_2 sono coordinate omogenee, si pensi come operante sulle forme quadratiche (Hermitiane) $a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2$ $[\alpha x_1 x_1^0 + (\beta + i\gamma) x_1 x_2^0 + (\beta - i\gamma) x_2 x_1^0 + \delta x_2 x_2^0]$. Esso dà luogo così ad un gruppo G

(*) Anche la metrica euclidea si dice essere a curvatura costante. Essa è un caso limite delle metriche di Bólyai e di Riemann. Anche essa si potrebbe, volendo, definire partendo da una forma V quadratica (nelle coordinate di iperpiano). La V sarebbe però una forma degenere, e la $V = 0$ rappresenterebbe il cosidetto assoluto.

di trasformazioni proiettive sulle a, b, c $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Pensiamo le a, b, c $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ come coordinate omogenee nel piano (nello spazio). Il gruppo G trasforma in sè stessa la conica $ac - b^2 = 0$ (la quadrica $\alpha\delta - (\beta + i\gamma)(\beta - i\gamma) = \alpha\delta - \beta^2 - \gamma^2 = 0$), ed è un gruppo di movimenti nella metrica a curvatura costante definita da questa conica (quadrica).

Ora noi ci chiediamo: ***quando può la metrica definita da una forma quadratica essere una metrica reale?***

Per i risultati del § 7, la metrica sarà reale nella regione R (se pure esiste) di S, i cui punti hanno un iperpiano polare, che non interseca in punti reali la quadrica $V = 0$. Una tal regione esiste soltanto in due casi:

1.° La forma V (a coefficienti reali) è una forma definita, cosicchè $V = 0$ è l'equazione di una quadrica totalmente immaginaria. In tal caso con un cambiamento lineare reale di variabili noi possiamo ridurre la V alla forma $\pm (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$. La regione R coincide con l'***intero*** spazio S; e la nostra metrica sarà definita da un elemento lineare

$$ds^2 = h^2 (dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2) \qquad (h = \text{cost. reale})$$

dove le x sono variabili legate da una relazione, che possiamo supporre, senza diminuire la generalità, essere la

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Una tal metrica si dice *ellittica*. Come vedremo al § 10, a questa classe di metriche appartiene la metrica di Riemann (§ 6, pag. 25).

2.° La quadrica $V = 0$, pure contenendo punti reali, non è rigata. Con un cambiamento lineare reale di variabili, la V è riducibile al tipo $\pm (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2)$. La regione R, in cui la nostra metrica è ***reale***, è la regione formata dai punti interni alla quadrica $V = 0$. In tal regione noi potremo supporre le x legate dalla

$$V(x) = x_n^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{n-1}^2 = 1,$$

e l'elemento lineare sarà del tipo

$$h\,(d\,x_n^2 - d\,x_1^2 - \ldots\ldots - d\,x_{n-1}^2)$$

dove h è una costante. Noi naturalmente dobbiamo scegliere la h in guisa che questo elemento lineare sia una forma positiva. Ora dalla $V(x) = 1$ si trae differenziando $x_n\,d\,x_n - x_1\,d\,x_1 - \ldots\ldots - x_{n-1}\,d\,x_{n-1} = 0$. Quindi i $d\,x$ sono proporzionali alle coordinate di un punto B, posto sull'iperpiano polare del punto (x) rispetto alla quadrica $V = 0$. Ma per ipotesi il punto (x) è interno alla $V = 0$. Il punto B è quindi esterno alla $V = 0$ e perciò

$$d\,x_n^2 - d\,x_1^2 - \ldots\ldots - d\,x_{n-1}^2 < 0.$$

Noi dunque dovremo prendere come elemento lineare la forma differenziale

$$d\,s^2 = h^2\,(d\,x_1^2 + \ldots\ldots + d\,x_{n-1}^2 - d\,x_n^2) \qquad (h = \text{cost. reale})$$

Una tale metrica si dirà ***iperbolica.*** Come vedremo (§ 10), a questa classe di metriche appartiene la metrica di Bólyai (§ 6, pag. 25).

§ 10. — Le rappresentazioni conformi delle metriche a curvatura costante su uno spazio euclideo.

Vogliamo ora dimostrare che tra uno spazio a curvatura costante ellittico o iperbolico a $n - 1$ dimensioni e uno spazio euclideo pure a $n - 1$ dimensioni si può sempre porre una corrispondenza conforme, ossia una corrispondenza che conservi gli angoli (§ 6, pag. 32).

Cominciamo dagli spazii ellittici. Sia S un tale spazio, a $n - 1$ dimensioni, il cui elemento lineare sia

$$d\,s^2 = h^2 \sum_1^n d\,x_i^2 \qquad (h = \text{cost.}) \tag{10}$$

dove le x sono costanti legate dalla:

$$x_1^2 + \ldots\ldots + x_n^2 = 1, \tag{11}$$

Consideriamo uno spazio euclideo, in cui le x sono coordinate cartesiane ortogonali. Esso avrà un elemento lineare $d\,x_1^2 + \ldots + d\,x_n^2$. La (11) sarà in questo spazio l'equazione di una ipersfera J col centro nell'origine, e con raggio uguale all'unità. A ogni punto di J corrisponde un punto di S; e la distanza di due punti infinitamente vicini di J è per la (10) proporzionale alla distanza dei due punti corrispondenti di S. E quindi anche l'angolo di due direzioni poste su J è uguale all'angolo delle direzioni corrispondenti poste su S. Osserviamo però che, se noi continuiamo a considerare in S le x come coordinate omogenee, e quindi come non distinti un punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e il punto $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$, a uno stesso punto di S corrispondono due punti di J diametralmente opposti. Se vogliamo avere tra S e J una corrispondenza biunivoca, dovremo considerare soltanto un emisfero di J, o, più precisamente, una regione R di J, i cui punti soddisfino per es. o alla:

$$x_n < 0,$$

oppure alle due relazioni

$$x_{n-1} < 0 \qquad x_n = 0,$$

oppure alle

$$x_{n-2} < 0 \qquad x_{n-1} = x_n = 0,$$

oppure alle

$$x_{n-3} < 0 \qquad x_{n-2} = x_{n-1} = x_n = 0,$$

oppure ecc. ecc.

Ora ricordiamo che, proiettando stereograficamente una ipersfera J da un suo punto sull'iperpiano π tangente a J nel punto diametralmente opposto, si ottiene una rappresentazione di J su uno spazio euclideo π, che conserva gli angoli. Noi proietteremo dunque stereograficamente la nostra ipersfera dal punto $(0, 0 \ldots, 0, 1)$ sull'iperpiano $x_n = -1$. Per determinare un punto di questo iperpiano π basta darne le prime $n - 1$ coordinate, in quanto che si sa *a priori* che la x_n di un punto di π è uguale a -1. E noi indicheremo queste $n - 1$ coordinate con $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, per

evitare ogni ambiguità. Per la nostra proiezione stereografica a un punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di J corrisponderà in π il punto di coordinate:

$$(12) \qquad \xi_j = \frac{2\, x_j}{1 - x_n}. \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

E a un punto di questo iperpiano π, di coordinate $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, corrisponde sull'ipersfera il punto di coordinate

$$(13) \qquad x_j = \frac{4\, \xi_j}{p+4} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \quad x_n = \frac{p-4}{p+4},$$

dove abbiamo posto:

$$(13)' \qquad p = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2 .$$

Indicherò d'ora innanzi in questo paragrafo con i un indice, che varia da 1 ad n, con j un indice che varia da 1 ad $n-1$. Le (12), (13) danno una corrispondenza biunivoca tra i punti di J e quelli di π, e quindi anche una corrispondenza (1, 2) — non biunivoca — tra i punti (x) dello spazio non euclideo S e i punti (ξ) dello spazio euclideo π. La metrica esistente in S è definita dalle (10), (11): la metrica esistente in π è definita dalla $d s^2 = \sum_j d \xi_j^2$. La corrispondenza così stabilita tra S e π è una corrispondenza conforme (che conserva gli angoli). Ciò risulta da quanto abbiamo detto fin qui; e si può verificare direttamente, perchè le (13) dànno:

$$h^2 \sum_i d\, x_i^2 = h^2 \left(\frac{4}{p+4}\right)^2 \sum_j d\, \xi_j^2 .$$

I due elementi lineari differiscono solo per un fattore finito: ciò che dimostra il nostro asserto.

Al nostro risultato si può dare anche un'altra forma. Se noi cambiamo coordinate nello spazio S, assumendo in luogo delle n coordinate x, legate dalla (11), le $n-1$ coordinate ***indipendenti***

$$(12)' \qquad \eta_j = \tfrac{1}{2}\, \xi_j = \frac{x_j}{1 - x_n},$$

l'elemento lineare $h^2 \sum_i d x_i^2$ di S diventa $\dfrac{4\, h^2 \sum d \eta_j^2}{(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_{n-1}^2 + 1)^2}$

Resta così in particolare evidente che la metrica di Riemann, citata al § 6 (pag. 25), è proprio, come avevamo già enunciato al § 9 (pag. 49), *una metrica ellittica a curvatura costante.*

Ricordiamo ancora che, non considerando noi come distinti in S un punto (x_i) e un punto $(-x_i)$, la corrispondenza tra S e π è una corrispondenza (1, 2). Questa corrispondenza si può rendere biunivoca, se noi consideriamo soltanto quella regione ρ di π (immagine della regione R di J), i cui punti soddisfanno alla $p < 4$, oppure alle $p = 4$, $\xi_{n-1} < 0$, oppure alle $p = 4$, $\xi_{n-1} = 0$, $\xi_{n-2} < 0$, ecc. ecc.

Con queste convenzioni dovremmo però rinunciare alla continuità della corrispondenza; e noi perciò non le adotteremo.

A un punto (x_i) corrispondono dunque i due punti

$$\xi'_j = 2\,\frac{x_j}{1 - x_n}, \qquad \xi''_j = -2\,\frac{x_j}{1 + x_n}.$$

Per due punti (ξ'_j) e (ξ''_j) corrispondenti a uno stesso punto di S si ha quindi:

$$0 > \frac{\xi'_1}{\xi''_1} = \frac{\xi'_2}{\xi''_2} = \ldots. = \frac{\xi'_{n-1}}{\xi''_{n-1}}$$

$$\Sigma\, \xi'^2_j \cdot \Sigma\, \xi''^2_j = 16\, \frac{(\Sigma_j\, x_j^2)^2}{(1 - x_n^2)^2} = 16.$$

I due punti (ξ'_j), (ξ''_j) sono dunque allineati col centro O dell'ipersfera $\Sigma\, \xi_j^2 + 4 = 0$, e il prodotto delle distanze da essi al punto O è uguale a 4; il centro O è *interno* al segmento congiungente i due punti. Tutto ciò si può riassumere dicendo che i punti (ξ'_j) e (ξ''_j) si corrispondono nell'inversione per raggi vettori reciproci, che lascia fissi i punti dell'ipersfera (immaginaria) $\Sigma\, \xi_j^2 + 4 = 0$. (Cfr. la nota a pag. 57 e seg.).

Quelle linee di S, i cui punti soddisfano a $n - 1$ equazioni lineari omogenee indipendenti sulle x, sono rappresentate su J da cerchi massimi, vale a dire da cerchi che tagliano in punti diametralmente opposti l'intersezione di J con l'iperpiano $x_n = 0$. Poichè nella proiezione stereografica di J su π, i cerchi (come

è ben noto e del resto facilmente si verifica mediante le (12), (13)) si proiettano in cerchi, avremo che le linee suddette hanno su π per immagine dei cerchi, che tagliano in punti diametralmente opposti la ipersfera $p = 4$. Osserviamo che l'asserzione: *il cerchio C taglia in punti diametralmente opposti l'ipersfera* $p = 4$, equivale all'altra: *il cerchio C taglia ortogonalmente l'ipersfera* $p + 4 = 0$. *E viceversa* (*). L'ipersfera $p + 4 = 0$ è però immaginaria.

Studiamo ora gli spazii iperbolici S, il cui elemento lineare è

$$(10)' \quad ds^2 = h^2(dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{n-1}^2 - dx_n^2) \quad (h = \text{cost. reale})$$

dove le x sono variabili legate dalla:

$$(11)' \qquad x_n^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2) = 1.$$

Osserviamo che, se noi definiamo mediante le (13) n quantità x in funzione di $n - 1$ variabili indipendenti ξ, le quantità x così ottenute, sono, in virtù dei calcoli precedenti, legate dalla sola (10); e le forme $\sum_i dx_i^2$, $\sum_j d\xi_j^2$ differiscono per il fattore $\left(\frac{4}{p+4}\right)^2$ dove $p = \sum_j \xi_j^2$. Quindi, se poniamo nelle (13) $-\sqrt{-1}\, x_j$ e $\sqrt{-1}\, \xi_j$ al posto delle x_j, ξ_j $(j \neq n)$, riconosciamo che le quantità x definite dalle

$$(14) \quad \begin{cases} x_j = \dfrac{4\,\xi_j}{\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 - 4} & (j = 1, 2, \dots, n-1) \\[2ex] x_n = \dfrac{\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 + 4}{\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 - 4} \end{cases}$$

sono legate dall'unica relazione (11)', e che si ha identicamente

$$h^2(dx_1^2 + \dots + dx_{n-1}^2 - dx_n^2) = h^2\left(\frac{4}{\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 - 4}\right)^2 \sum d\xi_j^2 .$$

(*) Infatti le condizioni affinchè un cerchio $x^2 + y^2 + gx + fy + h = 0$ tagli ortogonalmente il cerchio $x^2 + y^2 - a = 0$, o tagli il cerchio $x^2 + y^2 + a = 0$ in punti diametralmente opposti, si esprimono ambedue mediante la stessa equazione $h = a$.

Dalle (14), (15) si trae che valori reali per le ξ corrispondono a valori reali per le x, e viceversa. Le (14), (15) individuano una corrispondenza conforme ***reale*** tra lo spazio iperbolico S, e uno spazio euclideo π, in cui le ξ sono coordinate cartesiane ortogonali. Un punto (ξ_j) di π individua il punto (x_i) di S; ma ad un punto (x_i) di S corrispondono in generale due punti (ξ'_j) e (ξ''_j) di π. Infatti un punto (x_i) non si deve in S considerare distinto dal punto $(-x_i)$; e per le (15) a questi due punti ***non distinti*** corrispondono in π due punti ***distinti***, le cui coordinate sono date dalle:

$$\xi'_j = 2\,\frac{x_j}{x_n - 1}, \qquad \xi''_j = 2\,\frac{x_j}{x_n + 1}.$$

Per due punti di π corrispondenti a un medesimo punto di S si ha quindi:

$$0 < \frac{\xi'_1}{\xi''_1} = \frac{\xi'_2}{\xi''_2} = \ldots\ldots = \frac{\xi'_{n-1}}{\xi''_{n-1}},$$
$$\Sigma\,\xi'^2_j\ \Sigma\,\xi''^2_j = 16.$$

Vale a dire: a uno stesso punto di S corrispondono due punti di π, posti su uno stesso raggio uscente dal centro dell'ipersfera $\Sigma\,\xi_i^2 = 4$, e tali che il prodotto delle loro distanze dal centro di questa ipersfera è uguale a 4. In altre parole questi due punti sono trasformati l'uno dell'altro nell'inversione per raggi vettori reciproci, che trasforma in sè stesso ogni punto di questa ipersfera. Se noi dunque ci limitiamo a considerare quella regione di π, che è interna a questa ipersfera, la nostra rappresentazione diventa una rappresentazione biunivoca, pure restando *continua.* Questa ipersfera si chiama l'*ipersfera* ***assoluto***, perchè è l'immagine della quadrica

$$V = x_1^2 + \ldots. + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0,$$

la quale si chiama *quadrica assoluto* in quanto che essa è, come

vedremo al § 12, l'immagine dei punti di S, che nella nostra metrica sono a distanza infinita.

Anche qui i nostri risultati si possono interpretare in un'altra forma, dicendo che l'elemento lineare di una metrica iperbolica, quando si prendano a coordinate indipendenti le

$$\eta_j = \tfrac{1}{2}\xi_j = \frac{x_j}{x_n - 1}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (15)'$$

assume la forma

$$ds^2 = 4h^2 \frac{d\eta_1^2 + \ldots + d\eta_{n-1}^2}{(\eta_1^2 + \ldots + \eta_{n-1}^2 - 1)^2}. \qquad (h = \text{cost. reale})$$

Le linee, che in S sono rappresentate da $n-1$ equazioni lineari omogenee indipendenti tra le x, hanno per immagine in π dei cerchi, che *tagliano in punti diametralmente opposti l'ipersfera immaginaria* $\sum_j \xi_j^2 + 4 = 0$, o, ciò ch'è lo stesso, *che tagliano ad angolo retto l'ipersfera assoluto (reale)*

$$\sum \xi_j^2 = 4.$$

Nel caso delle metriche ellittiche si può pure parlare di ipersfera assoluto: una tale ipersfera è, nelle precedenti notazioni, l'ipersfera $\sum_j \xi_j^2 + 4 = 0$; e quindi è, come abbiamo già detto, totalmente immaginaria.

Faremo ancora un'osservazione importante. Se lo spazio euclideo immagine π è rappresentato conformemente su un altro spazio euclideo δ (*), esisterà evidentemente una rappresentazione conforme tra lo spazio iperbolico S e il nuovo spazio euclideo δ.

(*) Ricorderò brevemente le proprietà fondamentali delle rappresentazioni conformi di due spazii euclidei s, s' a $n-1$ dimensioni l'uno sull'altro. Siano x_i, ξ_i coordinate cartesiane ortogonali rispettivamente in s, s' $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Una tale rappresentazione è p. es. la trasformazione T definita dalle $\xi_i = x_i$.

Tutte le altre rappresentazioni conformi di s su s' saranno trasformazioni del tipo $T\,U$, dove U è una trasformazione conforme generica

Indichiamo con $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ coordinate cartesiane ortogonali in δ; e studiamo il caso, specialmente notevole, che l'ipersfera assoluto di π abbia in δ per immagine un iperpiano, che sarà detto iperpiano *assoluto.* Dalla teoria della inversione per raggi vettori reciproci si sa che una rappresentazione conforme tra i due spazii euclidei π e δ, che all'ipersfera $\sum_j \xi_j^2 - 4 = 0$

---

dello spazio s in sè stesso. Studiamo queste trasformazioni U. Si dimostra (cfr. BIANCHI, « Lezioni di Geometria differenziale », 2.ª edizione, vol. I, pag. 375-376. Pisa, Spoerri) coi metodi della geometria differenziale, che, se $n > 3$, ogni trasformazione U conforme reale dello spazio s in sè stesso, o è un puro movimento, o è una pura similitudine, o è un' inversione per raggi vettori reciproci, oppure è prodotto di più trasformazioni dei tipi qui ricordati. E ricordo che, come già si è osservato più sopra nel testo (pag. 54 e 56), si dice *inversione per raggi vettori reciproci rispetto a una ipersfera* L di centro O e raggio R reale o puramente immaginario quella trasformazione che porta un punto A nel punto A', allineato con A, tale che O è esterno o interno al segmento $A\,A'$, a seconda che R è reale o puramente immaginario, e che $O\,A \,.\, O\,A' = |R|^2$. Se O ha per coordinate $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, le formole che rappresentano tale inversione sono dunque

$$x'_i - a_i = \frac{R^2\,(x_i - a_i)}{\sum_h (x_h - a_h)^2} \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Una tale trasformazione è involutoria, ossia coincide con la trasformazione inversa.

Se R tende all'infinito, mentre la sfera L tende a diventare un iperpiano, allora la inversione citata si riduce a una simmetria rispetto a questo iperpiano.

Nel caso di $n = 3$, oltre alle trasformazioni conformi qui ricordate di s in sè stesso, ve ne sono infinite altre di natura affatto distinta: noi in queste pagine ne prescinderemo *in via assoluta*, riferendoci, anche nel caso di $n = 3$, soltanto a trasformazioni del tipo considerato più sopra.

La geometria elementare insegna che movimenti, similitudini e inversioni per raggi vettori reciproci portano un' ipersfera, o un iperpiano in una ipersfera (o eccezionalmente in un iperpiano). Altrettanto avverrà quindi delle rappresentazioni conformi più generali (se $n > 3$), o, se $n = 3$, di quelle rappresentazioni conformi che qui consideriamo. Questa proprietà è anzi *caratteristica* per le nostre rappresentazioni conformi, e serve così, nel caso di $n = 3$, a distinguerle dalle altre rappresentazioni conformi possibili. Basta anzi che una rappresentazione conforme del piano euclideo

di π faccia corrispondere un iperpiano di δ, (p. es. l'iperpiano $y_{n-1}=0$) è data p. es. dalle equazioni:

$$y_t = 4 \frac{\xi_t}{\xi_1^2 + \ldots + \xi_{n-2}^2 + (\xi_{n-1} - 2)^2}, \qquad (t = 1, 2, \ldots, n-2)$$

$$y_{n-1} = -1 - 4 \frac{\xi_{n-1} - 2}{\xi_1^2 + \ldots + \xi_{n-2}^2 + (\xi_{n-1} - 2)^2},$$

che sono equivalenti alle

$$\xi_t = \frac{4\, y_t}{y_1^2 + \ldots + y_{n-2}^2 + (y_{n-1}+1)^2}, \qquad (t = 1, 2, \ldots, n-2)$$

$$\xi_{n-1} = 2 - 4 \frac{y_{n-1}+1}{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-2}^2 + (y_{n-1}+1)^2}.$$

π in sè stesso porti un cerchio in un altro cerchio, perchè essa sia una delle rappresentazioni da noi considerate.

Una inversione rispetto ad una ipersfera L trasforma una ipersfera I ortogonale ad L in una ipersfera ancora ortogonale ad L e passante per l'intersezione di L e di I; e quindi trasforma I in sè.

Inversamente se una trasformazione U, scelta tra le rappresentazioni conformi sopra considerate, muta in sè stessa un'ipersfera reale I di centro O, e trasforma in sè stessa anche ciascuna delle regioni, in cui I divide s, allora la U o è una simmetria, o è una inversione per raggi vettori reciproci rispetto a un iperpiano od a un'ipersfera, che taglia I ortogonalmente, oppure è prodotto di più operazioni di questo tipo. Ciò è ben evidente, se la U lascia fisso il punto O. In tal caso essa deve mutare le rette uscenti da O in cerchi o rette uscenti da O e taglianti ortogonalmente I: essa porta quindi le rette uscenti da O in rette uscenti da O. Di più gli angoli, che queste rette formano a due a due, devono essere conservati. Se ne deduce tosto che U è un puro movimento *euclideo*, il quale lascia fisso il punto O, e che quindi U è prodotto di simmetrie rispetto a iperpiani uscenti da O.

Se poi O fosse dalla U portato in un punto O', è ben facile dimostrare che esiste un'ipersfera I_1, tagliante I ortogonalmente, tale che O e O' siano punti omologhi nell'inversione S per raggi vettori reciproci definita da I_1. Quindi la $U' = S\,U$ lascia fisso il punto O, e come la S e la U trasforma I in sè: essa dunque, per quanto abbiamo detto, è un prodotto di simmetrie rispetto a iperpiani passanti per O. La $U = S^{-1}\,U' = S\,U'$ è quindi prodotto di simmetrie siffatte e della inversione S.

Del resto questo teorema è conseguenza immediata dei risultati della prima parte del § 13.

Ricordando le (14), (15), ne deduciamo:

$$(16) \qquad y_t = \frac{x_t}{x_n - x_{n-1}} \quad (t = 1, 2, \ldots, n-2); \quad y_{n-1} = \frac{-1}{x_n - x_{n-1}}.$$

Assumendo in S, al posto delle x, come nuove coordinate le y, definite dalle (16), l'elemento lineare assume la forma notevole seguente:

$$(17) \qquad h^2 \frac{\Sigma\, dy_i^2}{y_{n-1}^2}.$$

Da essa risulta tosto che le *metriche di Bólyai,* citate al § 6 (pag. 25), *sono metriche iperboliche a curvatura costante.* Tra lo spazio S e lo spazio euclideo $\mathfrak{S}$, in cui le $y_1, \ldots, y_{n-1}$ sono coordinate cartesiane ortogonali, vi è una rappresentazione conforme. A un punto di $\mathfrak{S}$ corrisponde un punto di S; a un punto di S corrispondono due punti di $\mathfrak{S}$, simmetrici rispetto all' iperpiano *assoluto* $y_{n-1} = 0$. La rappresentazione è biunivoca, se noi ci limitiamo a considerare una sola delle due regioni, in cui l'iperpiano $y_{n-1} = 0$ divide lo spazio $\mathfrak{S}$: p. es. la regione definita dalla $y_{n-1} > 0$. In tal caso le formule (16) si possono scrivere sotto la forma più precisa:

$$(16)' \qquad y_t = \frac{x_t}{x_n - x_{n-1}} \quad (t = 1, 2, \ldots, n-2), \quad y_{n-1} = \frac{1}{x_n - x_{n-1}}.$$

Se noi lasciassimo indeterminato il fattore di proporzionalità delle x, senza prefissare che $x_n^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2 = 1$, l'ultima delle (16)' si scriverebbe:

$$(16)'' \qquad y_{n-1} = \left| \frac{\sqrt{x_n^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}}{x_n - x_{n-1}} \right|$$

mentre le altre equazioni (16)' rimarrebbero inalterate.

§ 11. — Movimenti negli spazii a curvatura costante.

Noi abbiamo visto che una metrica a curvatura costante in uno spazio a $n - 1$ dimensioni è definita da una quadrica di questo spazio. Ogni proiettività, che muta questa quadrica in sè

stessa, è, come abbiamo visto nel § 7, un movimento nella nostra metrica. Ci proponiamo ora di determinare tutti i movimenti delle due specie di metriche reali a curvatura costante trovate nel § 10: e vedremo così che non esiste nessun altro movimento oltre a quelli rappresentati dalle suddette proiettività.

Nel nostro caso, secondo quanto trovammo precedentemente, la forma quadratica sarà la $V(x_i) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \varepsilon x_n^2$, dove con ε indichiamo $+1$ o -1, secondo che si tratta dell'una o dell'altra metrica: e l'elemento lineare è dato da $h^2 V(dx)$ ($h =$ cost.), dove le x sono variabili legate dalla equazione $V(x) = \varepsilon$. Il movimento più generale sarà dato dalla più generale trasformazione

$$x'_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

che trasforma in sè stessa tanto la forma $V(x)$, quanto la forma $V(dx)$. Posto per simmetria $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots \varepsilon_{n-1} = 1$, $\varepsilon_n = \varepsilon$, dovrà dunque essere:

$$(\alpha) \qquad \sum_k \varepsilon_k \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right)^2 = \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(\beta) \qquad \sum_k \varepsilon_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = 0 \qquad (i \neq l)\ (i, l = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(\gamma) \qquad \sum_k \varepsilon_k \varphi_k^2 = \sum_k \varepsilon_k x_k^2.$$

Derivando (α) rispetto a x_t, si ottiene:

$$(\delta) \qquad \sum_k \varepsilon_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_t} = 0.$$

Derivando (β) rispetto x_t si ha:

$$(\varepsilon) \qquad \sum \varepsilon_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_l \partial x_t} + \sum_k \varepsilon_k \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_t} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = 0,$$

che vale anche per $i = l$, perchè equivale in questo caso alla (δ). Scriviamo l'equazione che si ricava da (ε) permutando l, t,

$$(\varepsilon') \qquad \sum \varepsilon_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_l \partial x_t} + \sum \varepsilon_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_t} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_l} = 0,$$

e quella che si ricava da (ε) permutando i, t,

$$(\varepsilon'') \qquad \Sigma\, \varepsilon_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_t} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_l} - \Sigma\, \varepsilon_k \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_t} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = 0.$$

Aggiungendo (ε') a (ε) e sottraendone (ε''), otteniamo:

$$\sum_k \varepsilon_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_l \partial x_t} = 0.$$

Il sistema delle equazioni, che si ottengono da questa tenendo fissi l e t e facendo percorrere a i i valori da 1 ad n, è un sistema di n equazioni lineari omogenee nelle n incognite $\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_l \partial x_t}$, il cui determinante è il Iacobiano delle φ. Ma il Iacobiano delle φ non può essere identicamente nullo: quindi si avrà:

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_l \partial x_t} = 0.$$

In altre parole le φ sono polinomii di primo grado nelle x. Poniamo dunque

$$\varphi_k = \sum_h a_{kh}\, x_h + a_k \qquad (a = \text{cost.});$$

sostituendo questi valori in (γ), e identificandone i due membri, si ottiene immediatamente che le a_k sono nulle. Un movimento resta così definito dalle

$$x'_k = \sum_h a_{kh}\, x_h. \qquad (a = \text{cost.})$$

Sostituendo in (γ), si riconosce poi che le n^2 costanti a_{kh} sono legate dalle $n \frac{n+1}{2}$ equazioni seguenti:

$$\sum_k \varepsilon_k\, a_{kh}^2 = \varepsilon_h, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_k \varepsilon_k\, a_{kh}\, a_{kt} = 0. \qquad (h \neq t;\ h, t = 1, 2, \ldots, n)$$

E si riconosce facilmente che le (α), (β) non impongono alcuna ulteriore condizione alle a_{kh}. I movimenti dipendono dunque da $n^2 - \frac{n(n+1)}{2}$ ossia $\frac{n(n-1)}{2}$ parametri arbitrarii. L'insieme di tutti i movimenti gode evidentemente delle proprietà caratteristiche dei gruppi (§ 2, pag. 7). Essi costituiscono perciò un

gruppo finito continuo a $\frac{n(n-1)}{2}$ ***parametri.*** Studieremo nel § 13 la questione se questo gruppo è a una, o a più schiere di trasformazioni.

Ricordando le proprietà più elementari delle proiettività, noi abbiamo:

I movimenti dei nostri spazii sono quelle trasformazioni biunivoche dello spazio, in cui le x ***sono coordinate omogenee, che trasformano in sè stessa la quadrica assoluto*** $\sum_k \varepsilon_k x_k^2 = 0$ ***e portano una retta in una retta.***

(Naturalmente con *retta* intendiamo quella linea, i cui punti soddisfano a $n - 2$ equazioni lineari intere omogenee indipendenti nelle x).

Consideriamo ora la rappresentazione conforme di uno dei nostri spazii S su uno spazio euclideo π studiata al § 10. La quadrica assoluto ha in π come immagine una ipersfera I reale o immaginaria, che può eventualmente ridursi a un iperpiano (§ 10). E, nel caso di metriche di Bólyai, il nostro spazio ha per immagine soltanto una delle due regioni, in cui I divide π. Una trasformazione di S individua una corrispondente trasformazione in π. Noi ci chiediamo: Quali trasformazioni in π corrispondono ai movimenti di S? Ricordiamo che le *rette* (nel senso più sopra definito) di S hanno per immagine in π i cerchi che tagliano I ortogonalmente. Dal nostro precedente teorema si può quindi dedurre:

Ai movimenti di uno spazio S ***in sè stesso corrispondono su*** π ***quelle trasformazioni*** T, ***che lasciano fissa la ipersfera*** (o iperpiano) ***assoluto*** I, ***che portano ogni cerchio, che taglia*** I ***ortogonalmente, in un altro cerchio, che taglia*** I ***ortogonalmente, e che, se*** I ***è reale, trasformano in sè stessa ciascuna delle regioni, in cui*** I ***divide*** π (e non le permutano). Questa ultima condizione si potrebbe sopprimere, se noi, conformemente ai risultati del § 10, non considerassimo come distinti due punti, trasformati l'uno dell'altro mediante l'inversione per raggi vettori reciproci definita da I

(o. se I è un iperpiano, mediante la simmetria rispetto all'iper piano I). Questa ultima condizione è invece necessaria. se, conformemente a quanto abbiamo fatto nel § 10, e a quanto faremo sempre d'ora in poi, rappresentiamo S in quella regione di π, che è interna ad I, o, se I è un iperpiano, che giace da una certa banda determinata di I.

Noi possiamo subito trovare una ulteriore proprietà di queste trasformazioni T (che naturalmente sarà una conseguenza di quella enunciata più sopra). I movimenti in S conservano evidentemente i valori degli angoli. Ma S è rappresentato conformemente su π. L'angolo di due direzioni su S è quindi uguale all'angolo delle due direzioni corrispondenti su π. Le trasformazioni T conservano dunque, in π, le grandezze degli angoli: o, con l'usuale linguaggio, ***le trasformazioni T sono trasformazioni conformi in*** π.

Osserviamo ancora che la condizione: « ***T porta ogni cerchio che taglia ortogonalmente I in un altro cerchio, che taglia ortogonalmente I*** » si può evidentemente enunciare anche nel seguente modo: « ***T trasforma ogni ipersfera che taglia ortogonalmente I, in un' altra ipersfera che taglia ortogonalmente I*** » (*).

A queste ipersfere corrispondono in S delle ipersuperficie, che per le (15) sono rappresentate da una equazione lineare omogenea tra le x. Perciò queste ipersuperficie si dicono ***gli iperpiani della nostra metrica.***

Osservazione. — Nel caso delle metriche ellittiche, la ipersfera assoluto I ha un raggio puramente immaginario $i\,R$ ($R =$ cost. reale). Ma noi possiamo facilmente sostituire al precedente enunciato un altro, in cui non si parli di ipersfere immaginarie. Indichiamo con I' la ipersfera *reale* di raggio R, che è concen-

---

(*) Basta ricordare che le ipersfere, che tagliano I ortogonalmente, sono le uniche ipersuperficie, che godono della seguente proprietà: per due punti A, B di una tale ipersuperficie passa un cerchio (e uno solo), che giace sull'ipersuperficie e taglia I ad angolo retto.

trica a I. Per quanto abbiamo già detto (§ 10, pag. 55), le *ipersfere e gli iperpiani che tagliano ortogonalmente I* non sono che le *ipersfere e gli iperpiani, la cui intersezione con I' giace in un iperpiano passante per il centro comune di I e I'.*

Studiamo ora più particolarmente le metriche iperboliche. In tal caso la ipersfera I è reale. Supponiamo $n > 3$; la I avrà almeno due dimensioni. E noi potremo parlare dell'angolo che due direzioni poste su I fanno tra di loro (nel senso ***euclideo:*** evidentemente questi angoli non hanno alcun significato nella nostra metrica, perchè I è singolare per questa metrica). Una trasformazione T è conforme(*) *in tutto* π, e trasforma I in sè stessa per le proprietà, che noi abbiamo sopra trovato. Quindi essa porterà anche l'angolo (***euclideo***) di due direzioni poste su I in un angolo uguale. Di più *ogni varietà subordinata W_{n-3}, posta su I, a n — 3 dimensioni, che sia varietà base di un fascio di ipersfere, dovrà essere portata in una varietà W'_{n-3}, posta su I, che sia pure base di un fascio di ipersfere.* Infatti per W_{n-3} passerà un'ipersfera W_{n-2} ortogonale ad I, la quale sarà portata da T in un'altra ipersfera W'_{n-2} (ortogonale ad I); questa taglierà I in una varietà W'_{n-3}, per cui passano le ipersfere I e W'_{n-2}, e che è quindi base di un fascio di ipersfere. *Le trasformazioni T subordinano dunque su I delle trasformazioni T' che mutano in sè stesso il sistema delle varietà W_{n-3}, poste su I, che sono base di un fascio di ipersfere* (**).

Viceversa *se $n > 3$ e se T' è una trasformazione* (*necessariamente conforme*) *di I in sè stessa, che porta ogni varietà W_{n-3} di I,*

(*) Si ricordi (cfr. la nota al § 10 pag. 57) che T è prodotto di simmetrie e di inversioni per raggi vettori reciproci.

(**) Per $n = 3$ questo teorema perde ogni significato, in quanto che una qualunque coppia di punti (W_{n-3}) del cerchio I è base di un fascio di cerchi. In tal caso però la T, essendo una trasformazione biunivoca, subordina sul cerchio I a una proiettività.

che sia base di un fascio di ipersfere, in una varietà analoga W'_{n-3}, allora essa determina una delle nostre trasformazioni T in tutto π.

Infatti sia W_{n-2} una ipersfera ortogonale a I, sia W_{n-3} l'intersezione di W_{n-2} e di I, e sia W'_{n-2} l'ipersfera ortogonale a I, passante per la varietà W'_{n-3}, trasformata di W_{n-3} per la T'.

Noi assumeremo la W'_{n-2} come trasformata di W_{n-2}. E avremo così definita in π una trasformazione delle ipersfere W_{n-2} taglianti ortogonalmente I in ipersfere W'_{n-2} taglianti ortogonalmente I. Per provare che questa trasformazione è una trasformazione T, basterà dimostrare che le W'_{n-2}, trasformate di quelle W_{n-2}, che passano per un punto A, passano per un altro punto A', che assumeremo come trasformato di A per la T. Infatti in questo caso la nostra trasformazione godrà delle proprietà caratteristiche per le trasformazioni T, che noi abbiamo determinato precedentemente (pag. 63 e 64).

Senza diminuire la generalità, potremo supporre che I sia un iperpiano; e, se $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sono coordinate cartesiane ortogonali nel nostro spazio euclideo rappresentativo, potremo (§ 10, pag. 57 e seg.) supporre che I sia l'iperpiano

$$y_{n-1} = 0.$$

Una W_{n-3} di I sarà in I definita da un'equazione:

$$(\alpha) \qquad \gamma_0 \sum_{i=1}^{n-2} y_i^2 + \sum_1^{n-2} \gamma_i\, y_i + \gamma = 0 \qquad (\gamma = \text{cost.})$$

E la W_{n-3} trasformata sarà rappresentata da un'equazione

$$(\alpha)' \qquad \gamma'_0 \Sigma\, y_i^2 + \Sigma\, \gamma'_i\, y_i + \gamma' = 0$$

dove le γ' saranno funzioni lineari delle γ. Affinchè la W_{n-2} che taglia ortogonalmente I lungo la (α) passi per un punto A dello spazio ambiente, è necessario e sufficiente che le γ siano legate da una relazione lineare (dipendente soltanto dal punto A). Se questo avviene, altrettanto avverrà per le γ', che sono funzioni lineari delle γ. Le W'_{n-2} passanti per le W'_{n-3}, definite dalle $(\alpha)'$, passeranno quindi per un altro punto A' dello spazio ambiente.

c. d. d.

§ 12. — Goedetiche e distanze negli spazi a curvatura costante.

Come abbiamo detto al § 6 (pag. 26), due punti A, B abbastanza vicini di uno spazio S, in cui sia definita una metrica reale qualunque, determinano in modo univoco un arco di geodetica $A\,B$ passante per A, B. Quindi un movimento M, relativo alla nostra metrica, che lasci fissi i punti A, B, lascierà fisso l'arco di geodetica $A\,B$, e quindi anche tutta la geodetica $A\,B$. Se C è un punto qualunque dell'arco di geodetica considerato, esso sarà portato da M in un punto C' dell'arco stesso. E, poichè i movimenti lasciano inalterate le lunghezze, le lunghezze degli archi $A\,C$, $C\,B$ saranno rispettivamente uguali a quelle degli archi $A\,C'$, $C'\,B$. Il punto C' coincide dunque con C. *I movimenti, che lasciano fissi due punti A, B, lasciano fissi tutti i punti dell'arco di geodetica definito dai punti A, B* (almeno se A, B sono sufficientemente vicini), *e quindi anche evidentemente tutti i punti della geodetica $A\,B$.*

Sia ora S uno spazio, in cui sia definita una metrica a curvatura costante, determinata da una forma quadratica V nelle coordinate omogenee x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Abbiamo visto che i movimenti non sono che le proiettività trasformanti la forma V in sè stessa. Se una tale proiettività P lascia fissi due punti A, B, essa lascia fissa la retta $A\,B$ (retta essendo, come già abbiamo detto a pag. 63 la linea, che è determinata da $n-2$ equazioni lineari omogenee indipendenti nelle x), e quindi anche i punti A', B' di questa retta, coniugati dei punti A, B rispetto alla quadrica $V = 0$. Ma, se una proiettività lascia fissi quattro punti di una retta, essa lascia fissi tutti i punti della retta. Quindi P lascia fissi tutti i punti della retta $A\,B$. Sia ora $n > 3$. Si vede subito in tal caso, anche dal semplice computo dei parametri, che, preso un punto qualunque C non posto sulla retta $A\,B$, si può sempre trovare un movimento che lasci fissi i punti A, B, e che non lasci fisso il punto C. Quindi, se $n > 3$, *la retta $A\,B$ è il luogo*

dei punti lasciati fissi da tutti i movimenti, che lasciano fissi i punti A, B. Ma per la osservazione precedente noi sappiamo già che tutta la geodetica $A\,B$ è fissa: si ha dunque: ***La geodetica, che congiunge due punti A, B coincide con la retta A B***, od in altri termini: ***nelle coordinate x_i le geodetiche sono rappresentate da $n-2$ equazioni lineari omogenee indipendenti.***

Io dico che questo risultato vale anche nel caso di spazii (a curvatura costante) a due dimensioni ($n = 3$).

Sia infatti $dx_1^2 + dx_2^2 \pm dx_3^2$ (dove $x_3^2 \pm (x_1^2 + x_2^2) = 1$) l'elemento lineare di un tale spazio S_2. Evidentemente questo spazio si può considerare come coincidente con la superficie $x_4 = 0$ dello spazio (a tre dimensioni ed a curvatura costante) S_3, il cui elemento lineare è $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_4^2 \pm dx_3^2$, dove le x sono coordinate legate dalla $x_3^2 \pm (x_1^2 + x_2^2 + x_4^2) = 1$. Ora, per quanto abbiamo detto, la geodetica di S_3 che congiunge due punti A, B della nostra superficie $x_4 = 0$ è una retta che giace evidentemente *sulla superficie stessa* $x_4 = 0$. E questa retta è quindi *a fortiori* una geodetica di questa superficie, perchè essa dà il più breve degli archi che congiungono A, B nello spazio S_3 e quindi anche a maggior ragione il più breve degli archi che congiungono A, B senza uscire dalla detta superficie $x_4 = 0$. Quindi le geodetiche di S_2 sono ancora linee rette (vale a dire linee rappresentate da una equazione lineare nelle coordinate x_1, x_2, x_3).

Conseguenza di ciò è *che in uno spazio a curvatura costante due punti diversi A, B, comunque distanti, determinano in modo univoco la geodetica che passa per essi.* Cosicchè, se la geodetica $A\,B$ passa per un punto E, la geodetica $A\,E$ passa per B.

Data una metrica qualunque, si chiama ***distanza geodetica*** o più brevemente, ***distanza*** di due punti A, B la lunghezza dell'arco di geodetica $A\,B$, che è terminato ai punti A, B. Noi vogliamo ora determinare, nelle metriche a curvatura costante, la lunghezza di un arco di geodetica $A\,B$, ossia la lunghezza di un segmento rettilineo $A\,B$, che, per definizione, sarà la distanza

dei punti A, B. Osserviamo che: *Se un segmento $A\ B$ è portato da un movimento nel segmento $A'\ B'$, deve essere* (in valore assoluto):

$$\textit{distanza } A\ B = \textit{distanza } A'\ B'.$$

Ma, poichè i movimenti non sono che le proiettività trasformanti in sè stessa la quadrica $V = 0$, si sa che: ***Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un movimento, che porti un segmento $A\ B$ in un segmento $A'\ B'$, è che il birapporto $(A\ B\ C\ D)$ (*) sia uguale al birapporto $(A'\ B'\ C'\ D')$, o al birapporto $(B'\ A'\ C'\ D') = = \frac{1}{(A'\ B'\ C'\ D')} = \frac{1}{(B'\ A'\ D'\ C')} = (A'\ B'\ D'\ C')$, dove con C, D (C', D') indico i punti comuni alla retta $A\ B$ $(A'\ B')$ e alla quadrica $V = 0$.***

Dai precedenti due teoremi segue che, se per due coppie di punti A, B e A', B' si ha

$$(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D') \qquad \text{oppure} \qquad (A\,B\,C\,D) = \frac{1}{(A'\,B'\,C'\,D')}$$

la distanza geodetica dei punti A, B è uguale alla distanza dei punti A', B'. La distanza di due punti A, B (che, secondo le nostre convenzioni, è sempre positiva) sarà dunque una funzione φ, evidentemente *continua*, del corrispondente birapporto $\lambda = (A\ B\ C\ D)$, tale che:

$$\varphi(\lambda) = \varphi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{18}$$

Studiamo ora p. es. le metriche iperboliche. Siano A, B, E tre punti di una retta generica r, interni alla regione R, ove la nostra metrica è reale. Se C, D sono i punti comuni alla r, e

---

(*) Il birapporto $(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)$ di quattro punti di una stessa retta r, le cui coordinate non omogenee su r sono ordinatamente x_1, x_2, x_3, x_4, è per definizione uguale a

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4}.$$

Ricordo questo, per evitare ogni ambiguità di notazione.

alla quadrica $V = 0$, e se sulla r i punti A, B, C, D, E si susseguono nel verso $C\ A\ B\ E\ D$, si ha:

distanza $A\ B$ + distanza $B\ E$ = distanza $A\ E$.

Posto cioè $\lambda = (A\ B\ C\ D)$, $\lambda' = (B\ E\ C\ D)$, $\lambda'' = (A\ E\ C\ D)$, sarà:

$$(18)' \qquad \varphi(\lambda) + \varphi(\lambda') = \varphi(\lambda'').$$

Ma, per le nostre ipotesi, i birapporti $\lambda, \lambda', \lambda''$ sono quantità soddisfacenti alle sole relazioni

$$(19) \qquad \lambda\lambda' = \lambda'' \qquad 0 < \lambda' < 1 \qquad 0 < \lambda < 1.$$

La (18)′ deve dunque essere conseguenza delle (19). E perciò (*):

La $\varphi(\lambda)$ è uguale, a meno di un fattore costante, al valore assoluto del logaritmo (sempre reale) ***di λ.***

Se il punto A o il punto B giacciono sulla $V = 0$, si ha $\lambda = 0$, oppure $\lambda = \infty$: e la distanza $A\ B$ è perciò infinita. Ecco perchè la $V = 0$ si dice quadrica ***assoluto*** (§ 10, pag. 56).

A un analogo risultato si giunge nel caso di metriche ellittiche (**). Questo caso ha però per noi assai minore importanza.

(*) Infatti $\varphi(\lambda)$, funzione sempre continua e positiva della variabile positiva λ, soddisfa per le (18)′ e (19) alla:

$$(\alpha) \qquad \varphi(\lambda) + \varphi(\lambda') = \varphi(\lambda\lambda') \quad \text{se} \quad 0 < \lambda < 1,\ 0 < \lambda' < 1.$$

E per la (18) soddisfa alla

$$(\beta) \qquad \varphi(\lambda) = \varphi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{se} \quad \lambda > 0.$$

Se $\varphi(e) = \varepsilon$, la ε sarà una costante reale e positiva; e dalle (α), (β) si trarrà

$$(\gamma) \qquad \varphi\left(\frac{1}{e}\right) = \varepsilon;\ \varphi(K) = \varepsilon\, h\,,\ \text{se}\ K = e^h\,,\ \text{ossia}\ h = \log K$$

essendo h un qualsiasi numero razionale positivo o negativo. La continuità della φ dimostra che la seconda delle (γ) vale anche se h è irrazionale; e così risulta dimostrato il teorema del testo.

(**) Si osservi che in questo caso $\log \lambda$ è puramente immaginario ed è definito a meno di multipli di $2\pi i$. La $\varphi(\lambda)$ è, a meno di un fattore costante, uguale a $\frac{\log \lambda}{i} + 2m\pi$, dove m è un intero arbitrario. Questa indeterminazione dipende da ciò che una geodetica è, in una me

§ 13. — Classificazione dei movimenti negli spazii a curvatura costante.

Ricorderò anzitutto come si classificano i movimenti di uno spazio S euclideo a $n - 1$ dimensioni, quando, secondo le nostre convenzioni, si chiami movimento ogni trasformazione, che conservi le distanze (cfr. § 6, pag. 27, per il caso $n = 4$).

Tra questi movimenti esistono le cosidette ***simmetrie,*** le quali sono gli unici movimenti, che lascino fissi ∞^{n-2} punti di S. E precisamente una ***simmetria*** T lascia fissi i punti di un iperpiano α: se un punto A di S è portato da T nel punto B, α è il luogo dei punti equidistanti da A, B. Esiste quindi una e una sola simmetria, che trasformi l' uno nell' altro due punti dati A, B.

Una ***simmetria*** T è un' operazione ***involutoria;*** vale a dire $T^{-1} = T$; $T^2 = 1$.

Siano A_1, A'_1 due punti distinti corrispondenti per un movimento M qualunque. Sia T_1 la simmetria, che porti A_1 in A'_1, e A'_1 in A_1. La trasformazione $T_1\ M$ sarà un movimento, che lascia fisso A_1. Ogni punto lasciato fisso da M è equidistante da A_1, A'_1 e quindi è pure lasciato fisso dalla T_1, e dalla $T_1\ M$. Se $T_1\ M$ non è la trasformazione identica, siano A_2, A'_2 due punti indipendenti da A_1 (distinti da A_1) corrispondenti per la $T_1\ M$, e sia T_2 la simmetria che porta A_2 in A'_2. La trasformazione $T_2\ T_1\ M$ lascerà fisso il punto A_2; essa lascerà pure fisso ogni punto lasciato fisso da $T_1\ M$, e in particolare anche il punto A_1. Dunque almeno i punti A_1, A_2 sono invarianti per $T_2\ T_1\ M$. Quindi $T_2\ T_1\ M$

trica ellittica, una linea chiusa di lunghezza finita, come già si è accennato al § 6 (pag. 25), e che la geometria in una metrica ellittica coincide, come abbiamo già osservato al § 10 (pag. 52), con la geometria vigente su una ipersfera euclidea, quando non vi si considerino come distinti due punti diametralmente opposti.

trasforma in sè stessi i punti della retta $A_1 A_2$. Se dunque $T_2 T_1 M \neq 1$, esisterà un punto A_3, indipendente da A_1, A_2, ossia non giacente sulla retta $A_1 A_2$, che $T_2 T_1 M$ porta in un punto A'_3 distinto. Se T_3 è la simmetria che porta A_3 in A'_3, il movimento $T_3 T_2 T_1 M$ lascia fissi almeno tutti i punti del piano $A_1 A_2 A_3$. Così continuando, vediamo che possiamo trovare un certo numero di simmetrie T_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ in guisa che il movimento $T_\nu T_{\nu-1} \ldots T_1 M$, o sia l'identità, o lasci fissi *almeno* ν punti indipendenti. Esisterà quindi un intero $\nu < n + 1$, tale(*) che $T_\nu T_{\nu-1} \ldots T_1 M = 1$, ossia che

$$M = T_1^{-1} T_2^{-1} \ldots T_\nu^{-1} = T_1 T_2 \ldots T_\nu.$$

Ogni movimento M è quindi prodotto di un certo numero $\nu < n + 1$ di simmetrie. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ i ν iperpiani individuanti queste simmetrie. Facciamo variare questi iperpiani con continuità, fino a che essi vengano tutti a coincidere con un iperpiano α scelto ad arbitrio. Il movimento M varierà con continuità, e diventerà uguale a T^ν, dove T è la simmetria definita da α. Ora $T^\nu = 1$, oppure $T^\nu = T$, secondo che ν è pari, o dispari. Quindi:

Se T è una simmetria qualunque, ogni movimento M si può (variando con continuità i parametri da cui esso dipende) far diventare uguale o alla trasformazione identica, o alla T.

È poi ben chiaro che un movimento, che sia una pura sim-

(*) Infatti, se un movimento M trasforma in sè stessi n punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ indipendenti, M coincide con la trasformazione identica. Ciò è ben evidente se $n = 2$, e si dimostra in generale col metodo di induzione completa. Infatti supponiamo di aver già dimostrato quanto asserimmo per $n = m - 1$, e dimostriamolo per $n = m$. Per l'ipotesi fatta, se si indica con S_i lo spazio lineare ad $m - 2$ dimensioni passante per $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_m$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, M dovrà trasformare in sè stessi tutti i punti degli m spazii S_i, perchè ne lascia fissi $m - 1$ punti indipendenti. M dovrà dunque trasformare in sè stessa ogni geodetica di S (perchè lascia fissi i punti, in cui tale geodetica incontra gli m spazii S_i) e quindi evidentemente anche ogni punto di S.

metria T, non si può ridurre all'identità con una variazione continua dei parametri. In tal caso infatti un $(n - 1)^{edro}$ ortogonale di S e il suo trasformato per T sarebbero l'uno all'altro sovrapponibili mediante un movimento continuo: ciò che è assurdo (*).

Se M, M' sono due movimenti, ciascuno dei quali si può, con variazione continua dei rispettivi parametri, ridurre all'identità (a una simmetria T), il loro prodotto si potrà ridurre con una trasformazione continua all'identità (alla T^2). Poichè $T^2 = 1$, questo prodotto si può in ambi i casi ridurre alla trasformazione identica.

I movimenti di uno spazio euclideo formano un gruppo Γ ***continuo a due schiere di trasformazioni. I movimenti della prima schiera*** (movimenti di prima specie) ***si possono ridurre, con una variazione continua dei parametri da cui dipendono, alla trasformazione identica, e formano da soli un gruppo*** G, ***contenuto in*** Γ ***come sottogruppo di indice*** 2. ***I movimenti della seconda schiera (movimenti improprii o di seconda specie) si possono con continuità ridurre a simmetrie.***

Il più generale movimento di seconda specie si ottiene moltiplicando un particolare movimento di seconda specie per il più generale movimento di prima specie.

(*) Si dice $(n - 1)^{edro}$ in S l'insieme di un punto O (***vertice***) e di $n - 1$ direzioni (***lati***) uscenti da O, le quali non appartengono ad alcuno spazio subordinato a $n - 2$ dimensioni. Un $(n - 1)^{edro}$ si dice ***ortogonale***, se i suoi lati sono a due a due normali. Supposte le coordinate cartesiane ortogonali, il determinante formato coi coseni di direzione dei lati (coseni degli angoli, che i lati formano con gli assi coordinati) di un $(n - 1)^{edro}$ ortogonale, è ortogonale, e quindi uguale a ± 1.

Due $(n - 1)^{edri}$, per cui tale determinante ha (non ha) lo stesso valore si dicono ***ugualmente*** (***non ugualmente***) ***orientati***.

Due $(n - 1)^{edri}$, trasformati l'uno dell'altro mediante una simmetria o un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto a un'ipersfera ***reale***, ***non sono*** ugualmente orientati. Dall'uno non si può quindi passare all'altro con un movimento continuo, perchè altrimenti il valore del corrispondente determinante dovrebbe variare con continuità da $+1$ a -1, o viceversa. Ciò è assurdo, perchè tale determinante non può assumere valori distinti da ± 1.

Il precedente teorema vale anche per gli spazii iperbolici a curvatura costante. Ciò è intuitivo, se ammettiamo quanto abbiamo enunciato (§ 6, pag. 24) che cioè la geometria di tali spazii ha comune con la geometria euclidea tutti i teoremi, che non presuppongono la verità del postulato di Euclide. Il nostro teorema si può però anche dimostrare in modo diretto, partendo dalle nostre definizioni. Una geometria iperbolica a $n-1$ dimensioni ha come elemento lineare la forma $h^2(dx_1^2+dx_2^2+\dots+dx_{n-1}^2-dx_n^2)$, dove le x sono variabili legate dalla $x_n^2-x_1^2-x_2^2-\dots-x_{n-1}^2=1$. Essa è reale nella regione interna alla quadrica assoluto Q $x_n^2-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2=0$. I movimenti non sono che le proiettività trasformanti questa quadrica Q in sè stessa. È ben facile vedere che esistono dei movimenti, che corrispondono nel caso attuale alle simmetrie euclidee, dei movimenti cioè che lasciano fissa una varietà reale a $n-2$ dimensioni, contenente almeno uno e quindi infiniti punti, in cui la nostra metrica è reale. I teoremi più elementari della geometria proiettiva dimostrano che una tale varietà deve essere una varietà lineare, cioè un iperpiano $\Sigma\,\alpha_i\,x_i=0$ ($\alpha_i=$ cost.), il quale, dovendo contenere almeno un punto ove la nostra metrica è reale, dovrà incontrare la quadrica Q in infiniti punti reali. E precisamente l'omologia armonica, che ha tale iperpiano come iperpiano di omologia, e il polo di detto iperpiano rispetto alla quadrica Q come centro di omologia, è l'unica proiettività, che possa trasformare in sè stessi quei punti del nostro iperpiano, che sono interni alla quadrica assoluto, pure lasciando fissa la quadrica Q. Un tale movimento si chiamerà, per analogia, la *simmetria* rispetto all'iperpiano $\Sigma\alpha_i x_i=0$ (*).

(*) Tra le simmetrie, definite da equazioni più semplici, ricorderò le T_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) definite rispettivamente dalle:

$$x'_i=-x_i \qquad x'_l=x_l\ (l=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots n).$$

Si noti però che la trasformazione T_n definita dalle

$$x'_l=x_l\ (l=1, 2, \dots, n-1) \qquad x'_n=-x_n$$

Se noi ricorriamo alla rappresentazione conforme (§ 10, pag. 51 e seg.) della nostra metrica iperbolica su un semispazio euclideo π, un iperpiano $\Sigma \alpha_i x_i = 0$ è rappresentato in una semisfera reale δ, che incontra ortogonalmente il piano assoluto, immagine della quadrica Q. (Cfr. le (13), (14) del § 10). Ricordando i teoremi del § 10, o scrivendo le formole effettive, si riconosce tosto che alla ***simmetria*** rispetto a tale iperpiano corrisponde nel nostro semispazio euclideo l'inversione per raggi vettori reciproci, che lascia fissi tutti i punti di δ.

Un $(n - 1)^{\text{edro}}$ ortogonale del nostro spazio iperbolico, ha in π per immagine un $(n - 1)^{\text{edro}}$ ortogonale. Due $(n - 1)^{\text{edri}}$ ortogonali, che si corrispondono nella nostra simmetria, hanno in π per immagine due $(n - 1)^{\text{edri}}$, che si corrispondono nella citata inversione per raggi vettori reciproci: quindi essi ***non sono ugualmente orientati,*** e non si possono sovrapporre con una trasformazione conforme e continua. Tanto basta per poter affermare che anche nel caso di spazii iperbolici non si può portare una simmetria nella trasformazione identica, con variazione continua di parametri.

Dopo ció si potrà, come abbiamo fatto nel caso degli spazii euclidei, scomporre un movimento qualunque in un prodotto di simmetrie: e colle stesse considerazioni che abbiamo svolto in quel caso dimostrare il nostro teorema anche per il caso attuale di spazii iperbolici.

Gli spazii ellittici a curvatura costante hanno per il nostro studio assai minore importanza. Io mi accontenterò quindi di un breve cenno. L'elemento lineare di un tale spazio è del tipo $h^2 \sum_i d x_i^2$, $(h = \text{cost.})$, dove le x_i si suppongono sodd'sfare alla

---

non è una ***simmetria,*** in quanto che essa è un movimento che lascia fissi tutti i punti dell'iperpiano $x_n = 0$, il quale non interseca in punti reali la quadrica Q e quindi non contiene alcun punto, in cui la nostra metrica è reale.

$\sum_i x_i^2 = 1$. Se noi, ***mutando le convenzioni adottate fin qui,*** riteneSsimo come ***distinti*** punti, le cui coordinate corrispondenti sono uguali e di segno contrario, allora si potrebbe vedere che il teorema, sopra enunciato, vale anche nel caso attuale (come è del resto ben noto per un caso particolare: il caso della sfera euclidea).

Se noi invece continuiamo a considerare come non distinti un punto (x_i) e un punto $(-x_i)$, allora il nostro teorema continua ancora a essere vero, se lo spazio ellittico ha un numero ***dispari*** di dimensioni. Se invece il nostro spazio avesse un numero ***pari*** di dimensioni, il gruppo dei movimenti sarebbe un gruppo a una sola schiera di trasformazioni (*): ogni movimento cioè si può ridurre all'identità facendo variare con continuità i parametri da cui esso dipende (**).

Dovremmo ora classificare più particolarmente i movimenti di prima e di seconda specie. Osserviamo tosto che non importa fare uno studio speciale per i movimenti di seconda specie, in quanto che il più generale movimento di seconda specie è prodotto del più generale movimento di prima specie per un ***particolare*** movimento di seconda specie, scelto in modo arbitrario (p. es. una particolare simmetria). Ci possiamo dunque limitare allo studio dei movimenti di prima specie.

(*) Il lettore può p. es. considerare i casi elementari del cerchio, e della sfera euclidea, quando vi si considerino come ***non distinti*** punti diametralmente opposti.

(**) I ragionamenti svolti nel caso di spazii iperbolici non si possono applicare agli spazii ellittici, in quanto che la rappresentazione conforme di un tale spazio S sopra uno spazio euclideo π non è continua e biunivoca. Un $(n-1)^{\text{edro}}$ ortogonale di tale spazio ha per immagine in π ***due*** $(n-1)^{\text{edri}}$ (trasformati l'uno dell'altro mediante una inversione rispetto a un'ipersfera immaginaria), i quali sono o non sono ugualmente orientati, secondo che il numero delle dimensioni di S è dispari, o pari.

Supporremo lo spazio a $n - 1$ dimensioni, indicando con $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le solite coordinate legate dalla

$$x_n^2 + \varepsilon (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2) = 1$$

dove $\varepsilon = +1$, oppure $\varepsilon = -1$, secondo che lo spazio è ellittico o iperbolico (*). Lo svolgere completamente lo studio di questi movimenti sarebbe però cosa troppo lunga, e per il nostro scopo non indispensabile. Io mi accontenterò quindi di enunciare i risultati, che nel § 14 confermeremo in modo diretto per i casi più importanti degli spazii iperbolici a 2 o 3 dimensioni, rimandando il lettore per il caso generale (che non offre del resto gravi difficoltà) alla Mem. dell'A.: ***Sulla teoria delle forme quadratiche ed Hermitiane*** ecc., pubblicata nel vol. 17, serie IV degli Atti dell'Accademia Gioenia di Catania.

Nel caso di uno spazio ellittico si dimostra che, se M è un movimento di prima specie in un tale spazio, si possono assumere come nuove variabili coordinate n combinazioni lineari reali e indipendenti $y_1, y_2, \ldots, y_n$ delle x in guisa che M sia definito da equazioni del tipo:

$$(20) \quad \begin{cases} y'_{2s-1} = y_{2s-1} \cos \theta_s - y_{2s} \operatorname{sen} \theta_s \\ y'_{2s} \phantom{{}_{-1}} = y_{2s} \cos \theta_s + y_{2s-1} \operatorname{sen} \theta_s \end{cases} (s = 1, 2, \ldots, r;\ 2r \leq n)$$
$$y'_k = y_k \qquad (k = 2r+1, 2r+2, \ldots, n)$$

Un tale movimento si dirà un movimento *ellittico*.

Nel caso di uno spazio iperbolico si dimostra, che, se M è un movimento di prima specie di questo spazio, si possono assumere come nuove variabili n combinazioni lineari reali indipendenti $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in guisa che M sia definito da equazioni del tipo (20) oppure da equazioni di uno dei tipi seguenti:

(*) **Ricordo che tanto le equazioni $x'_i = x_i$ quanto le $x'_i = - x_i$ rappresentano la trasformazione identica, in quanto che, secondo le nostre convenzioni, i punti (x_i) e $(- x_i)$ non sono distinti. Le $x'_i = \sum_k a_{ik} x_k$ e $x'_i = - \sum_k a_{ik} x_k$ rappresentano dunque uno stesso movimento.**

$$(21)\begin{cases} y'_1 = y_1 + y_2 \qquad y'_2 = y_2 + y_3 \qquad y'_3 = y_3 \\ y'_i = y_i \qquad (i = 4, 5, \ldots, n) \end{cases}$$

$$(22)\begin{cases} y'_1 = \rho\, y_1 \qquad y'_2 = \frac{1}{\rho}\, y_2 \quad (\rho \text{ cost. positiva differente da } +1) \\ y'_i = y_i \qquad (i = 3, 4, \ldots, n) \end{cases}$$

$$(23)\begin{cases} \left.\begin{array}{l} y'_{2s-1} = y_{2s-1}\cos\theta_s - y_{2s}\,\mathrm{sen}\,\theta_s \\ y'_{2s} \quad = y_{2s}\cos\theta_s + y_{2s-1}\mathrm{sen}\theta_s \end{array}\right\} (s = 1, 2, \ldots, r : 2r + 3 \leq n; \theta_s = \text{cost.}) \\ y'_{2r+1} = y_{2r+1} + y_{2r+2};\ y'_{2r+2} = y_{2r+2} + y_{2r+3};\ y'_{2r+3} = y_{2r+3} \\ y'_i = y_i \qquad (i = 2r + 4, 2r + 5, \ldots n) \end{cases}$$

$$(24)\begin{cases} \left.\begin{array}{l} y'_{2s-1} = y_{2s-1}\cos\theta_s - y_{2s}\,\mathrm{sen}\,\theta_s \\ y'_{2s} \quad = y_{2s}\cos\theta_s + y_{2s-1}\mathrm{sen}\theta_s \end{array}\right\} (s = 1, 2, \ldots, r; 2r + 2 \leq n : \theta_s = \text{cost.}) \\ y'_{2r+1} = \frac{1}{\rho}\, y_{2r+1};\ y'_{2r+2} = \rho\, y_{2r+2} (\rho \text{ cost. positiva differente da } +1) \\ y'_i = y_i \qquad (i = 2r + 3, 2r + 4, \ldots, n) \end{cases}$$

Un movimento (20) si dice *ellittico;* un movimento (21) *parabolico;* un movimento (22) *iperbolico;* i movimenti (23) e (24) si dicono *lossodromici:* e più precisamente un movimento (23) si dice *ellittico-parabolico;* un movimento (24) si dice *ellittico-iperbolico.* Quando si dice che un movimento è *lossodromico,* ci si deve accertare, che esso non sia lossodromico soltanto apparentemente, vale a dire che esso non sia in realtà o iperbolico, o parabolico, o perchè tutti gli angoli θ_s siano multipli di 2π, o perchè tali si possano rendere, mutando il segno di tutte le y'_i. Con questa convenzione, si dimostra che un movimento non può appartenere contemporaneamente a due delle cinque classi dei movimenti ellittici, parabolici, iperbolici, ellittico-parabolici, o ellittico iperbolici.

§ 14. — Gli spazii iperbolici a curvatura costante a due o tre dimensioni.

Confermeremo ora i risultati, enunciati testè in generale, per il caso specialmente importante degli spazii *iperbolici* a due, o a tre dimensioni.

E sopratutto vogliamo far notare gli stretti legami, che intercedono tra i gruppi di movimenti in tali spazii, e i gruppi delle sostituzioni lineari fratte su una variabile complessa. L'esistenza di tali legami è cosa ben evidente per quanto abbiamo già visto al § 7 (pag. 39 e seg.) e § 9 (pag. 49-50). Un gruppo G di trasformazioni

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1)$$

su una variabile x, è isomorfo al gruppo G' generato dalle

$$x'_1 = \pm (\alpha x_1 + \beta x_2) \qquad x'_2 = \pm (\gamma x_1 + \delta x_2)$$

sulle due variabili omogenee x_1, x_2. E il gruppo G', come abbiamo già detto, considerato come trasformante le forme quadratiche $y_1 x_1^2 + 2 y_2 x_1 x_2 + y_3 x_2^2$ o le forme Hermitiane $y_1 x_1 x_1^0 + y_2 x_1 x_2^0 + y_2^0 x_2 x_1^0 + y_3 x_2 x_2^0$ (a seconda che le α, β, γ, δ sono o non sono sempre tutte reali) diventa un gruppo di movimenti reali nella metrica iperbolica che ha per assoluto la conica *reale* $y_1 y_3 - y_2^2 = 0$, o la quadrica *reale* $y_1 y_3 - y'^2_2 - y''^2_2 = 0$ (dove si è posto $y_2 = y'_2 + i\, y''_2$).

Da queste osservazioni potremmo partire per il nostro studio; ma, per ragioni di opportunità, useremo una via più diretta. Una metrica iperbolica è determinata in uno spazio S lineare a due o a tre dimensioni, assumendovi come assoluto una conica C reale definita da un'equazione $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, o una quadrica Q reale non rigata definita da un'equazione $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$. E la metrica è reale nella regione R interna a C o a Q. Le rette di S sono (§ 12) l'immagine delle geodetiche nella nostra metrica. Perciò la regione R si chiama anche l'immagine *geodetica* della nostra metrica iperbolica. I movimenti nella nostra metrica non sono che quelle proiettività di S, che trasformano in sè stessa la C o la Q. Per determinare una di queste proiettività, basta definire come essa trasforma i punti di C o di Q. Infatti, se noi sappiamo come P trasforma i punti di C o di Q, noi sappiamo subito come essa trasforma una retta r di R, in quanto che la

retta r', trasformata di r, non è che la retta che congiunge i due punti di C (o di Q), che sono trasformati dei punti comuni alla retta r e alla C (Q). Il punto A' poi, trasformato di un punto A, è il punto per cui passano tutte le rette r', trasformate delle rette r, che passano per A.

Studiamo ora dapprima le metriche a due dimensioni. Sia A un punto reale di R. La polare di A rispetto a C incontra C in due punti A_1, A_2 immaginarii coniugati. Ora noi possiamo individuare un punto reale o complesso di C, dando il valore λ del rapporto $\frac{x_3 + x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_3 - x_2}$. (Questa uguaglianza è conseguenza dell'equazione di C). A ogni punto reale A interno a C corrisponderanno dunque due valori λ_1, λ_1^0 del parametro λ, immaginarii coniugati: quelli che individuano i punti A_1 ed A_2: e viceversa a due valori immaginarii coniugati di λ possiamo fare corrispondere il polo della retta reale che congiunge i punti immaginarii di C che questi valori individuano. Quella delle due quantità λ_1, λ_1^0, che ha positivo il coefficiente della parte immaginaria, si dica *l'affisso* di A. Ogni punto reale interno a C avrà un affisso pienamente determinato, che basta ad individuarlo (*): ed è facile trovare le coordinate (x_1, x_2, x_3) del punto A, il cui affisso è $\lambda = \mu + i\nu$. Invero per definizione, A è il polo della retta congiungente i due punti, le cui coordinate soddisfano rispettivamente alle

$$\frac{x_3 + x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_3 - x_2} = \mu + i\nu$$

e alle

$$\frac{x_3 + x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_3 - x_2} = \mu - i\nu.$$

Un facile calcolo ci dice allora che le coordinate di A sono date dalle:

$$(25) \qquad x_1 = \pm \frac{\mu}{\nu} \quad x_2 = \pm \frac{\mu^2 + \nu^2 - 1}{2\nu} \quad x_3 = \pm \frac{\mu^2 + \nu^2 + 1}{2\nu}$$

(*) I punti reali di C ed essi soltanto avranno un *affisso* reale, che coincide col valore assunto in essi dal parametro λ.

Viceversa l'affisso $\lambda = \mu + i\nu$ di un punto A di coordinate x_1, x_2, x_3 (legate da $x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$) è dato dalle

$$(25)' \qquad \mu = \frac{x_1}{x_3 - x_2} \qquad\qquad \nu = \frac{1}{|x_3 - x_2|}$$

Queste formole hanno un'importante interpretazione. Se noi, al modo di Gauss, rappresentiamo la variabile complessa $\lambda = \mu + i\nu$ coi punti reali di un piano, dove μ, ν sono coordinate cartesiane ortogonali, otterremo una rappresentazione dei punti reali della nostra metrica sul semipiano $\nu \geq 0$. L'assoluto sarà rappresentato dalla retta $\nu = 0$. Io dico che ***questa rappresentazione è precisamente la rappresentazione conforme studiata al*** § 10. Infatti, ponendo $y_1 = \mu$, $y_2 = \nu$, $n = 3$ nelle (16)' (pag. 60), queste diventano appunto le (25)'. Noi dunque potremmo partire ***dai risultati del*** § 10 ***per trovare in altro modo le formole del presente paragrafo: o, viceversa, partendo dalle teorie qui svolte, ritrovare le rappresentazioni conformi di uno spazio a due dimensioni, già trovate nel*** § 10 ***in generale.***

I movimenti reali della nostra metrica sono, come abbiamo già osservato più volte, le proiettività reali del piano (x_1, x_2, x_3), che trasformano C in sè stessa. Ogni tale proiettività individua una proiettività subordinata ***reale*** sui punti della conica C, e quindi una trasformazione lineare reale sui valori del parametro λ, che noi sappiamo potersi assumere come coordinata dei punti di questa conica.

Una tale trasformazione sarà definita da un'equazione del tipo:

$$(26) \qquad \lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$$

dove le α, β, γ, δ si possono supporre essere costanti ***reali*** soddisfacenti alla

$$(27) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

E viceversa ogni tale trasformazione individua un movimento reale nella nostra metrica. Consideriamo un qualsiasi punto

A interno alla C di affisso λ_1. La sua retta polare rispetto a C incontrerà C in due punti, in cui il valore del parametro λ sarà rispettivamente uguale a λ_1, e a λ_1^0. La retta polare del punto A', trasformato di A mediante il movimento, definito dalla (26), incontrerà C in due punti; i valori del parametro λ in questi punti si otterranno ponendo successivamente in (26) $\lambda = \lambda_1$, e $\lambda = \lambda_1^0$. Quale dei due valori così ottenuti sarà l'affisso di A'? ossia quale di essi ha positivo il coefficiente della parte immaginaria?

Per vedere questo, poniamo in (26) $\lambda = \mu + i\nu, \lambda' = \mu' + i\nu'$ (μ, ν, μ', ν' quantità reali). Troviamo:

$$\nu' = (\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{\nu}{(\gamma\mu + \delta)^2 + (\gamma\nu)^2}.$$

Ne concludiamo dunque che il coefficiente ν' della parte immaginaria di λ' è o non è dello stesso segno del coefficiente ν della parte immaginaria di λ, secondo che in (27) vale il segno superiore o inferiore. Se dunque vale il segno superiore, allora, se λ_1 è l'affisso A, la quantità λ'_1 (trasformata di λ_1 per la (26)) sarà proprio l'affisso di A'. Se invece nelle (27) vale il segno inferiore, l'affisso di A' si otterrà, trasformando mediante la (26) la quantità λ_1^0, o, ciò che è lo stesso, detto affisso sarà la quantità immaginaria coniugata di quella che si ottiene applicando la trasformazione (26) all'affisso di A.

In conclusione il movimento reale, che è definito entro R dalla (26) sarà definito dalla

$$(28) \qquad \lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \qquad (\text{se } \alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

oppure dalla

$$(29) \qquad \lambda' = \frac{\alpha\lambda_0 + \beta}{\gamma\lambda_0 + \delta} \qquad (\text{se } \alpha\delta - \beta\gamma = -1)$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono costanti reali, e λ si interpreta come l'affisso di un punto generico di R.

Verifichiamo dunque per nuova via quanto si vide in generale al § 13: che cioè i movimenti della nostra metrica formano

un gruppo G a due schiere di trasformazioni: l'una definita dalle (28), l'altra dalle (29). Le trasformazioni (28) poi si possono con variazione continua dei parametri α, β, γ, δ, ridurre alla trasformazione identica, e formano di per sè un gruppo continuo, che è contenuto in G come sottogruppo invariante di indice 2 (cfr. § 13, pag. 73, 74).

Per mezzo delle (25), (25)' è facile provare direttamente che le (28) definiscono un movimento, ossia una trasformazione lineare intera omogenea sulle x, che trasforma in sè stessa la forma $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Un facile calcolo dimostra infatti che la (28) equivale, per le (25), (25)' alla:

$$x'_i = \sum_k a_{ik}\, x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

dove:

$$(30)\quad \begin{cases} a_{11} = \alpha\delta + \beta\gamma;\ a_{12} = \alpha\gamma - \beta\delta;\ a_{13} = \alpha\gamma + \beta\delta \\ a_{21} = \alpha\beta - \gamma\delta;\ a_{22} = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2);\ a_{23} = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2) \\ a_{31} = \alpha\beta + \gamma\delta;\ a_{32} = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2);\ a_{33} = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) \end{cases}$$

Studiamo le trasformazioni (29). Tra esse, la più semplice è quella per cui $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = 1$, $\delta = -1$ e che è definita quindi dalla

$$(31) \qquad \lambda' = -\lambda_0.$$

Ogni movimento (29) è uguale al prodotto del movimento (31) per il movimento

$$\lambda' = \frac{(-\alpha)\lambda + \beta}{(-\gamma)\lambda + \delta} \qquad \text{dove } (-\alpha)\delta - (-\gamma)\beta = 1.$$

In altre parole *ogni movimento* (29) *è prodotto del movimento* (31) *per un movimento* (28). Il movimento (31) si può per le (25) definire mediante le equazioni:

$$(31)' \qquad x'_1 = -x_1;\ x'_2 = x_2;\ x'_3 = x_3.$$

Un movimento (29) lascia fissi quei punti, il cui affisso λ soddisfa alla $\lambda = \frac{\alpha\lambda_0 + \beta}{\gamma\lambda_0 + \delta}$, ossia alla $\gamma\lambda\lambda_0 + \delta\lambda - \alpha\lambda_0 - \beta = 0$. Posto $\lambda = \mu + i\nu$, questa equazione si scinde nelle:

$$\gamma(\mu^2 + \nu^2) + (\delta - \alpha)\mu - \beta = (\delta + \alpha)\nu = 0.$$

Se $\alpha + \delta \neq 0$, dovrà essere $\nu = 0$, e quindi $\gamma \mu^2 + (\delta - \alpha)\mu - \beta = 0$. Le due radici di questa equazione sono sempre reali e distinte, perchè $(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma = (\alpha + \delta)^2 + 4(\beta\gamma - \alpha\delta) = (\alpha + \delta)^2 + 4 > 0$. Il nostro movimento lascia perciò fissi due punti, il cui affisso è reale, ossia due punti, che nella nostra metrica sono posti a distanza infinita, ossia che giacciono su C.

Se invece $\delta + \alpha = 0$, le nostre equazioni si riducono alla sola:

$$\gamma (\mu^2 + \nu^2) + (\delta - \alpha) \mu - \beta = 0.$$

E il nostro movimento lascia fissi gli infiniti punti, il cui affisso $\lambda = \mu + i \nu$ è tale, che μ, ν soddisfino alla precedente equazione. Per le (25) si riconosce che la linea, luogo di questi punti, è la retta (geodetica) r, rappresentata dall'equazione:

$$\gamma (x_2 + x_3) + (\delta - \alpha) x_1 - \beta (x_3 - x_2) = 0.$$

Il nostro movimento non è che la simmetria (§ 13, pag. 74) definita da questa geodetica.

Studieremo ora la classificazione dei movimenti di prima specie, dimostrando nel caso attuale i risultati enunciati in generale al § 13.

Consideriamo un movimento (28). Un punto lasciato fisso da un tale movimento avrà un affisso λ tale che

$$(32) \qquad \lambda = \frac{\alpha \lambda + \beta}{\gamma \lambda + \delta} \text{ ossia } \gamma \lambda^2 + (\delta - \alpha) \lambda - \beta = 0.$$

Questa equazione può avere due radici reali distinte: ciò avviene se $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma$ è positivo, ossia (poichè $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) se

$$(33) \qquad (\alpha + \delta)^2 > 4.$$

Si noti che, se $\gamma = 0$ e $\delta - \alpha \neq 0$, la (33) è ancora soddisfatta; e si deve considerare la (32) come un'equazione, che ha due radici distinte, una finita, l'altra infinita.

Se dunque è soddisfatta la (33), il nostro movimento ***lascia fissi due punti di affisso reale e cioè due punti reali** A, B **a di-***

stanza infinita (posti su C) e nessun punto a distanza finita (entro C). (La proiettività corrispondente lascia ulteriormente fisso il polo della retta AB rispetto a C, che è esterno a C e non è quindi immagine di alcun punto reale della nostra metrica).

Osserviamo di più che se $\gamma \neq 0$ e se a, b sono le radici reali della (32), la (28) si potrà scrivere

$$(34) \qquad \frac{\lambda' - a}{\lambda' - b} = k \frac{\lambda - a}{\lambda - b} \qquad (k = \text{cost. reale positiva}).$$

Se invece $\gamma = 0$ ed a è la radice finita della (32) dovremo scrivere, al posto di (34), la

$$(34)' \qquad \lambda' - a = k(\lambda - a) \qquad (k = \text{costante reale positiva}).$$

Potrebbe invece avvenire che la (29) avesse una sola radice (reale, finita o infinita, secondo che $\gamma = 0$ oppure $\gamma \neq 0$). Ciò avviene se

$$(35) \qquad (\alpha + \delta)^2 = 4.$$

In tal caso il nostro movimento ***lascia fisso un sol punto a distanza infinita*** (posto su C).

Se $\gamma \neq 0$ ed a è la detta radice reale, il nostro movimento si può rappresentare con la formola

$$(36) \qquad \frac{1}{\lambda' - a} = \frac{1}{\lambda - a} + k,$$

dove k è una costante reale.

Se invece $\gamma = 0$, e quindi per la (35) $\alpha - \delta = 0$, il nostro movimento è rappresentato da una formola

$$(36)' \qquad \lambda' = \lambda + k \qquad (k = \text{costante reale}).$$

Infine, se

$$(37) \qquad (\alpha + \delta)^2 < 4,$$

la (32) ha due radici a, a_0 immaginarie coniugate: quella di esse, che ha il coefficiente della parte immaginaria maggiore di zero, sarà l'affisso ***di un punto reale interno a C, che sarà a distanza finita***, ***e sarà l'unico punto reale lasciato fisso dal movimento con-***

siderato. È intanto ben chiaro che il nostro movimento si può rappresentare con una formola:

$$\frac{\lambda' - a}{\lambda' - a_0} = k \frac{\lambda - a}{\lambda - a_0},$$

dove k è una costante. Ma, poichè il nostro movimento è reale, questa equazione deve restare equivalente a sè stessa, se noi scambiamo a ed a_0, e scriviamo k_0 al posto di k. Ciò avviene soltanto se $k = \frac{1}{k_0}$, ossia se k è in modulo uguale a 1. Noi potremo dunque porre $k = e^{i\theta}$ (θ = quantità reale). E il nostro movimento sarà rappresentato dall'equazione:

$$(38) \qquad \frac{\lambda' - a}{\lambda' - a_0} = e^{i\theta} \frac{\lambda - a}{\lambda - a_0}.$$

Ricordando le proprietà, che abbiamo trovato man mano per i punti lasciati fissi da uno dei nostri movimenti, riconosciamo facilmente che un movimento simile a un'altro, per cui sia soddisfatta la (33) o la (35) o la (37) soddisfa pure rispettivamente alla (33) o alla (35) o alla (37). Ciò si può verificare anche direttamente. Se $\lambda' = \frac{\alpha'\lambda + \beta'}{\gamma'\lambda + \delta'}$ è il movimento trasformato di (28) per una qualsiasi trasformazione lineare in λ, un facile calcolo dimostra che $(\alpha' + \delta')^2 = (\alpha + \delta)^2$. Ora un movimento, per cui è soddisfatta la (33), si può scrivere sotto la forma (34) o (34)'. Esso è quindi simile al movimento

$$(34)'' \qquad \lambda' = k\,\lambda = \frac{\sqrt{k}}{\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}\,\lambda \qquad (k = \text{cost. reale positiva}).$$

Infatti dalle (34), (34)' si passa alle (34)'', sostituendo λ rispettivamente alle $\frac{\lambda - a}{\lambda - b}$, $\lambda - a$. In modo analogo si prova che un movimento, per cui è soddisfatta la (35) o la (37), è simile rispettivamente ai movimenti:

$$(36)'' \qquad \lambda' = \lambda + 1:$$

$$(38)'' \frac{\lambda' - i}{\lambda' + i} = e^{i\theta} \frac{\lambda - i}{\lambda + i}, \text{ ossia } \lambda' = \frac{\lambda \cos\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{-\lambda \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}} \quad (\theta = \text{cost. reale}).$$

Per le (30) si deduce di qui che un movimento (28) o è simile al movimento definito dalle

$$x'_1 = x_1;\ x'_2 = \tfrac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)x_2 + \tfrac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right)x_3;\ x'_3 = \tfrac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right)x_2 + \tfrac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)x_3,$$

o dalle equivalenti

$$(34)'''\quad x'_1 = x_1;\ x'_2 + x'_3 = k\,(x_2 + x_3);\ x'_2 - x'_3 = \frac{1}{k}(x_2 - x_3);$$

oppure al movimento definito dalle

$$x'_1 = x_1 - x_2 + x_3;\ x'_2 = x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3);\ x'_3 = x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{3}{2}x_3,$$

o dalle equivalenti

$$(36)'''\quad (x'_3 - x'_2) = x_3 - x_2;\ x'_1 = x_1 + (x_3 - x_2);\ \frac{x'_3 + x'_2 - x'_1}{2} = \frac{x_3 + x_2 - x_1}{2} + x_1;$$

oppure al movimento definito dalle

$$(38)'''\quad x'_1 = x_1 \cos\theta - x_2 \operatorname{sen}\theta;\ x'_2 = x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta;\ x'_3 = x_3.$$

Confrontando con le (22), (21), (20) del § 13, pag. 77 e 78, riconosciamo facilmente che i corrispondenti movimenti sono rispettivamente iperbolici, parabolici, o ellittici. Un movimento (28) è dunque iperbolico, lossodromico, o ellittico secondo che è soddisfatta la (33), o la (35), o la (37).

Che non vi fossero movimenti lossodromici era prevedibile: la stessa definizione di movimenti lossodromici (pag. 78) dimostra che essi possono esistere soltanto se lo spazio ambiente ha almeno tre dimensioni.

Studieremo ora le metriche di Bólyai a tre dimensioni: abbiamo già visto che per determinare un movimento in questa metrica basta determinare come esso trasforma i punti della quadrica Q fondamentale, che ha per equazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Ora su questa quadrica esistono due sistemi immaginarii coniugati di ∞^1 generatrici, in guisa che per ogni punto reale della quadrica passano due generatrici immaginarie coniugate, appartenenti una a un sistema, l'altra all'altro.

Le equazioni delle generatrici di un sistema sono

$$\frac{x_1 + i\,x_2}{-x_3 + x_4} = \frac{x_4 + x_3}{x_1 - i\,x_2} = \lambda, \tag{39}$$

dove λ è un parametro costante lungo una stessa generatrice, ma variabile da generatrice a generatrice. Le equazioni delle generatrici dell'altro sistema sono

$$\frac{x_1 - i\,x_2}{-x_3 + x_4} = \frac{x_3 + x_4}{x_1 + i\,x_2} = \mu, \tag{39)'$$

dove μ è un altro parametro, costante lungo una stessa generatrice, e variabile da una generatrice all'altra. Se noi diamo i valori di λ e μ, individuiamo una generatrice di ciascun sistema, e quindi anche il loro punto d'intersezione; il quale sarà reale, soltanto se i dati valori di λ e μ sono immaginarii coniugati, ossia se $\mu = \lambda_0$. I punti reali di Q si possono dunque definire dando i valori di un solo parametro complesso λ. (Il valore corrispondente di μ resta individuato dalla $\mu = \lambda_0$).

Troviamo anzitutto le coordinate di un punto *reale* di Q, dato il valore (complesso) corrispondente di λ. Per le (39) si ha

$$x_1 + i\,x_2 + \lambda\,x_3 - \lambda\,x_4 = 0$$
$$-\lambda\,x_1 + i\lambda\,x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

E scambiando λ e λ_0, i e $-i$ si ha pure:

$$x_1 - i\,x_2 + \lambda_0\,x_3 - \lambda_0\,x_4 = 0.$$

Risolvendo queste equazioni rispetto alle x, e indicando con ρ un fattore di proporzionalità, si trova:

$$x_1 = \rho\,i(\lambda + \lambda_0);\ x_2 = \rho(\lambda - \lambda_0);\ x_3 = \rho\,i(\lambda\lambda_0 - 1);\ x_4 = \rho\,i(\lambda\lambda_0 + 1). \tag{40}$$

I movimenti nella nostra metrica non sono che le proiettività trasformanti Q in sè stessa. Una tal proiettività, o permuterà i due sistemi di generatrici della Q, oppure porterà una generatrice di uno dei due sistemi in un'altra generatrice appartenente allo stesso sistema. Supponiamo di essere in questo secondo caso. Poichè i due sistemi di generatrici sono trasfor-

mati proiettivamente in sè stessi, i parametri λ, μ subiranno ciascuno una trasformazione lineare

$$(41) \qquad \lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}; \quad \mu' = \frac{h\mu + k}{l\mu + m} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = hm - kl = 1)$$

dove α, β, γ, δ, h, k, l, m, sono costanti (in generale *complesse*). Poichè il movimento considerato si suppone reale, due generatrici di differente sistema immaginarie coniugate (ossia che si incontrano in un punto reale) debbono essere trasformate in due generatrici ancora immaginarie coniugate. In altre parole, se $\mu = \lambda_0$, dovrà essere $\mu' = \lambda'_0$. Potremo dunque supporre

$$h = \alpha_0, \quad k = \beta_0, \quad l = \gamma_0, \quad m = \delta_0$$

(dove α_0, β_0 .... sono le quantità immaginarie coniugate di α, β....). Quindi, la sola conoscenza delle α, β, γ, δ, ossia della

$$(41)' \qquad \lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

basta a individuare completamente la nostra proiettività.

La trasformazione (41)′ su λ deve naturalmente definire una trasformazione lineare intera omogenea sulle x_i, che trasforma in sè stessa la forma $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. Con facili calcoli si trova che questa trasformazione è:

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} x'_1 &= \tfrac{1}{2}(\alpha\delta_0 + \alpha_0\delta + \beta_0\gamma + \beta\gamma_0)x_1 + \tfrac{i}{2}(\alpha\delta_0 - \alpha_0\delta + \gamma_0\beta - \beta\gamma_0)x_2 + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\alpha\gamma_0 + \alpha_0\gamma - \beta\delta_0 - \beta_0\delta)x_3 + \tfrac{1}{2}(\alpha\gamma_0 + \alpha_0\gamma + \beta\delta_0 + \beta_0\delta)x_4 \\ x'_2 &= \tfrac{i}{2}(\alpha_0\delta - \alpha\delta_0 + \beta_0\gamma - \beta\gamma_0)x_1 + \tfrac{1}{2}(\alpha\delta_0 + \alpha_0\delta - \beta_0\gamma - \beta\gamma_0)x_2 + \\ &\quad + \tfrac{i}{2}(\alpha_0\gamma - \alpha\gamma_0 + \beta\delta_0 - \beta_0\delta)x_3 + \tfrac{i}{2}(\alpha_0\gamma - \alpha\gamma_0 + \beta_0\delta - \beta\delta_0)x_4 \\ x'_3 &= \tfrac{1}{2}(\alpha\beta_0 + \alpha_0\beta - \gamma\delta_0 - \gamma_0\delta)x_1 + \tfrac{i}{2}(\beta_0\alpha - \beta\alpha_0 + \gamma_0\delta - \gamma\delta_0)x_2 + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha_0 + \delta\delta_0 - \beta\beta_0 - \gamma\gamma_0)x_3 + \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 - \gamma\gamma_0 - \delta\delta_0)x_4 \\ x'_4 &= \tfrac{1}{2}(\alpha\beta_0 + \alpha_0\beta + \gamma\delta_0 + \gamma_0\delta)x_1 + \tfrac{i}{2}(\alpha\beta_0 + \gamma\delta_0 - \beta\alpha_0 - \delta\gamma_0)x_2 + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha_0 + \gamma\gamma_0 - \beta\beta_0 - \delta\delta_0)x_3 + \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0 + \delta\delta_0)x_4. \end{aligned} \right.$$

Le (42) rappresentano tutti i movimenti, che non permutano i due sistemi di generatrici. Ogni altro movimento si otterrà quindi moltiplicando un movimento (42) per uno speciale movi-

mento, che permuti i parametri λ, μ. Un tal movimento ci è dato dalle $\lambda' = \mu$: $\mu' = \lambda$, che sono equivalenti alle:

$$(43) \qquad x'_i = x_i \ (i = 1, 3, 4) \qquad x'_2 = -x_2.$$

Un movimento è sempre definito dunque o da una formola (41)' (o, ciò che è lo stesso, dalle (42)), *oppure è prodotto del movimento* (43) *per un movimento* (42). *Ritroviamo dunque* (§ 13, pag. 73 e 74) *che i movimenti formano un gruppo G a due schiere di trasformazioni: una di esse è definita dalle* (41)' *o dalle* (42) *e forma un gruppo continuo* Γ *a una sola schiera di trasformazioni, che è contenuto in G come sottogruppo di indice* 2.

Studiamo ora il significato della (41)' per la rappresentazione conforme della nostra metrica su un semispazio euclideo π, in cui y_1, y_2, y_3 sono coordinate cartesiane ortogonali, e $y_3 \geqq 0$. (Cfr. le (16) del § 10, pag. 60). I punti del piano $y_3 = 0$ sono l'immagine dei punti posti sulla quadrica Q; e quindi a ogni punto del piano $y_3 = 0$ corrisponderà un valore del parametro complesso λ. Confrontando le (16)' (pag. 60) con le (39) si trova

$$\lambda = \frac{x_1 + i x_2}{x_4 - x_3} = y_1 + i y_2$$

Il nostro parametro complesso λ *non è quindi che la variabile complessa di Gauss del piano assoluto* $y_3 = 0$, *su cui* y_1 *e* y_2 *sono coordinate cartesiane ortogonali.*

Se noi ci fossimo serviti di questa proprietà per definire il parametro λ, avremmo potuto ancora dimostrare direttamente che ogni movimento del nostro spazio iperbolico, o è definito da una trasformazione (41)' su $\lambda = y_1 + i y_2$, oppure è definito da una trasformazione, che si ottiene moltiplicando una trasformazione (41)' per la

$$(43)' \qquad \lambda' = + \lambda_0.$$

Infatti (§ 11, pag. 65 e 66) a un movimento del nostro spazio iperbolico corrisponde sul piano assoluto $y_3 = 0$ una trasformazione conforme che porta un cerchio in un cerchio e viceversa. E tali trasformazioni, com'è noto dai primi teoremi sulle rappresentazioni conformi (e come a noi risulta in via indiretta da quanto abbiamo esposto fin qui), sono definite appunto da una

asformazione (41)', quando conservano il senso degli angoli sul piano $_3 = 0$, o da una trasformazione prodotto di una trasformazione (41)' per (43)', quando non conservano il senso degli angoli sul piano $y_3 = 0$.

Studiamo ora una trasformazione (41)': essa, come sappiamo, definisce un movimento di prima specie, in quanto che si può ridurre alla trasformazione identica $\lambda' = \lambda$ con una variazione continua dei parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Essa lascia fissi quei valori di λ, per cui

$$\gamma \lambda^2 + (\delta - \alpha) \lambda + \beta = 0. \tag{44}$$

Se la (44) ha due radici a, b finite e distinte, la (41)' si può scrivere sotto la forma:

$$\frac{\lambda' - a}{\lambda' - b} = k \frac{\lambda - a}{\lambda - b} \qquad (\text{se } a \neq b \neq \infty \neq a).$$

Se la (44) ha due radici distinte, ma una di esse è infinita, se cioè $\gamma = 0$, $\delta - \alpha \neq 0$, la (41)' si può scrivere sotto la forma:

$$\lambda' - a = k (\lambda - a) \qquad (\text{se } b = \infty,\ a \neq b).$$

In ambi i casi la k soddisfa alla:

$$\alpha + \delta = \pm \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \tag{45}$$

Trasformiamo il nostro movimento nel primo caso con la $\lambda' = \frac{\lambda - a}{\lambda - b}$, nel secondo con la $\lambda' = \lambda - a$. Il nostro movimento si muterà nel movimento ***simile***, definito dalla

$$\lambda' = k \lambda = \frac{\sqrt{k}}{\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)} \lambda \qquad \left(\alpha + \delta = \pm \left[\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \right] \right)$$

Ora scriviamo, servendoci delle (42), la trasformazione lineare sulle x, definita da tale trasformazione sulla λ. Otterremo, posto $k = \rho e^{i\theta}$ (ρ, θ reali; $\rho > 0$):

$$x'_1 = x_1 \cos \text{[illegible]}_2 \operatorname{sen} \theta \qquad x'_3 = \tfrac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) x_3 + \tfrac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) x_4$$

$$x'_2 = x_1 \operatorname{sen} \theta + x_2 \cos \theta \qquad x'_4 = \tfrac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) x_3 + \tfrac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) x_4,$$

o, ciò che è lo stesso:

$$x'_1 = x_1 \cos\theta - x_2 \operatorname{sen}\theta \qquad x'_3 + x'_4 = \rho\,(x_3 + x_4)$$
$$x'_2 = x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta \qquad x'_3 - x'_4 = \frac{1}{\rho}\,(x_3 - x_4)$$

Confrontando queste formole con le (20), (22), (24) del § 13, pag. 77 e 78, troviamo che: Il movimento definito dalla (41)′ è, quando la (44) ha due radici distinte, ***ellittico*** se $\rho = 1$, ***iperbolico*** se $\cos\theta = 1$, ***lossodromico*** (ellittico-iperbolico) se $\rho \neq 1$, $\cos\theta \neq 1$. Queste tre specie di movimenti si possono caratterizzare con la seguente proprietà geometrica, che risulta immediatamente dalle nostre formole. Un movimento ellittico (iperbolico) lascia fissi tutti i punti posti su (i piani passanti per) una retta, che incontra la quadrica assoluto in punti reali, e che si chiama l'***asse*** del movimento. Un movimento lossodromico è il prodotto di un movimento ellittico e di un movimento iperbolico, che hanno lo stesso asse. Per la (45) e per la $k = \rho\, e^{i\theta}$ si trova che

$$\alpha + \delta = \pm \left[\sqrt{\rho}\, e^{\frac{i\theta}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\, e^{\frac{-i\theta}{2}}\right],$$

cosicchè si ha rispettivamente nei tre casi:

$\alpha + \delta$ *è reale e minore in valore assoluto di* 2,
$\alpha + \delta$ *è reale e maggiore in valore assoluto di* 2,
$\alpha + \delta$ *è immaginario.*

Studiamo ora il caso, in cui la (44) ha due radici uguali a uno stesso numero a, finito o infinito. (Il numero a è infinito, se $\gamma = \delta - \alpha = 0$; notiamo che allora $\beta \neq 0$, perchè altrimenti la (41) si ridurrebbe all'identità). Se la (44) ha radici uguali, finite o no, si ha $(\delta - \alpha)^2 - 4\beta\gamma = 0$, ossia (per la $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) $(\alpha + \delta)^2 = 4$. E viceversa. La (41)′ si può allora scrivere sotto la forma:

$$\frac{1}{\lambda' - a} = \frac{1}{\lambda - a} + k, \qquad (k = \text{cost.}) \ (\text{se } a \neq \infty)$$

o sotto la forma

$$\lambda' = \lambda + k \qquad (k + \text{cost.}) \ (\text{se } a = \infty).$$

Nel primo (secondo) caso trasformiamo il movimento (41)' mediante la $\lambda' = \frac{1}{k(\lambda - a)}$ $\left(\lambda' = \frac{\lambda}{k}\right)$. Il movimento (41)' sarà trasformato nel movimento ***simile***

$$\lambda' = \lambda + 1. \tag{46}$$

La trasformazione lineare (42) corrispondente alla (46) è:

$$x'_1 = x_1 - x_3 + x_4 \qquad x'_3 = x_1 + \tfrac{1}{2}(x_3 + x_4)$$
$$x'_2 = x_2 \qquad x'_4 = x_1 + \tfrac{1}{2}(3\,x_4 - x_3)$$

o, ciò ch'è lo stesso:

$$x'_2 = x_2;\ x'_4 - x'_3 = x_4 - x_3;\ x'_1 = x_1 + (x_4 - x_3);\ \frac{x'_4 + x'_3 - x'_1}{2} = \frac{x_4 + x_3 - x_1}{2} + x_1,$$

Confrontando con le (21) del § 13 (pag. 78) si riconosce che questo movimento è ***parabolico.*** Dunque anche il movimento iniziale (40)' è ***parabolico***, se $\alpha + \delta = \pm 2$.

Noi diremo che ***una trasformazione*** (41)' ***è ellittica, iperbolica, lossodromica o parabolica secondo che il corrispondente movimento è ellittico, iperbolico, lossodromico o parabolico.*** E avremo quindi che la (41)' è

iperbolica se $\alpha + \delta$ ***è reale, e*** $|\alpha + \delta| > 2$,
parabolica se $\alpha + \delta$ ***è reale, e*** $|\alpha + \delta| = 2$,
ellittica se $\alpha + \delta$ ***è reale, e*** $|\alpha + \delta| < 2$,
lossodromica se $\alpha + \delta$ ***è immaginario*** (*).

Nel caso che α, β, γ, δ siano reali e quindi la (41) si possa (secondo i risultati della prima parte del presente paragrafo) considerare come un movimento di uno spazio S_2 iperbolico a due dimensioni, la quantità $\alpha + \delta$ è sempre reale. E precisamente, per quanto abbiamo visto, (cfr. le (33), (35), (37)) la (41)' dà pro-

(*) Come abbiamo visto, tali trasformazioni lossodromiche sono sempre ellittico-iperboliche. Dalle (24) del § 13 (pag. 78) si deduce subito infatti che movimenti ellittico-parabolici non possono esistere in spazii iperbolici a meno di quattro dimensioni.

prio origine a un ***movimento ellittico, iperbolico o parabolico di*** S_n secondo che essa è ***ellittica, iperbolica*** o ***parabolica*** secondo le convenzioni ***attuali,*** le quali si riconoscono così conformi anche a quanto abbiamo trovato in questo stesso paragrafo per gli spazii iperbolici à due dimensioni.

Studiamo ora rapidamente i movimenti di seconda specie di uno spazio S di Bólyai a tre dimensioni. Un tale movimento M sarà definito da un'equazione

$$\lambda' = \frac{\alpha \lambda_0 + \beta}{\gamma \lambda_0 + \delta}.$$

I valori di λ, che una tale trasformazione lascia fissi, sono quelli, che soddisfano alla:

$$\lambda = \frac{\alpha \lambda_0 + \beta}{\gamma \lambda_0 + \delta} \text{ ossia } \gamma \lambda\lambda_0 + \delta \lambda - \alpha \lambda_0 - \beta = 0.$$

Ricorriamo ora alla rappresentazione conforme sul semispazio euclideo π, in cui y_1, y_2, y_3 sono coordinate cartesiane ortogonali e $y_3 > 0$. Abbiamo già visto che $\lambda = y_1 + i\, y_2$. I punti del piano assoluto, lasciati fissi dal nostro movimento, sono dunque quelli per cui è soddisfatta la:

$$\gamma (y_1^2 + y_2^2) + (\delta - \alpha)\, y_1 + i\, (\delta + \alpha)\, y_2 - \beta = 0$$

e quindi anche (se ci limitiamo a punti reali) la

$$\gamma_0 (y_1^2 + y_2^2) + (\delta_0 - \alpha_0)\, y_1 - i\, (\delta_0 + \alpha_0)\, y_2 - \beta_0 = 0.$$

Il nostro movimento M lascierà fissi infiniti punti reali allora e allora soltanto che queste equazioni definiscono una linea reale. Ciò avviene soltanto se

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\delta - \alpha}{\delta_0 - \alpha_0} = - \frac{\delta + \alpha}{\delta_0 + \alpha_0} = \frac{\beta}{\beta_0} \qquad \frac{\beta}{\gamma} + \frac{(\delta - \alpha)^2}{4\gamma^2} - \frac{(\delta + \alpha)^2}{4\gamma^2} > 0$$

E in questo caso le due equazioni precedenti definiscono un *cerchio* reale C.

Al movimento M corrisponderà in π l'inversione per raggi vettori reciproci definita dalla sfera σ, che taglia π ortogonal-

mente lungo il cerchio C. Il movimento M sarà la simmetria (§ 13, pag. 74, 75) rispetto a quel piano, che ha in π per immagine la citata sfera σ.

Quando noi abbiamo una trasformazione T, o un gruppo G di trasformazioni T del tipo:

$$\lambda' = \frac{\alpha \lambda + \beta}{\gamma \lambda + \delta} \qquad (\alpha \delta - \beta \gamma = 1)$$

a coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \beta$ reali (complessi), noi potremo dunque considerare T, o G come individuanti un movimento o un gruppo di movimenti in uno spazio S di Bólyai a due (a tre) dimensioni. Anzi per brevità noi diremo senz'altro che T o G sono un movimento o un gruppo di movimenti in uno spazio siffatto. Potremo poi considerare lo spazio S rappresentato geodeticamente entro una conica reale C (quadrica reale Q non rigata) in guisa che il movimento T o il gruppo G di movimenti siano in realtà una proiettività, o un gruppo di proiettività in S, trasformanti la C (la Q) in sè stessa. Potremo anche rappresentare conformemente S nei punti interni a un cerchio (a una sfera) limite, oppure nei punti di un semipiano (semispazio) limitato da una retta (da un piano) limite. La trasformazione T, o il gruppo G diverranno una trasformazione, o un gruppo di trasformazioni circolari conformi trasformanti in sè stessa la retta o il cerchio (il piano o la sfera) limite. I punti del cerchio o della retta (della sfera o del piano) limite sono poi l'immagine dei punti di C (di Q).

§ 15. — Le metriche Hermitiane.

Come abbiamo visto al § 8 (pag. 45 e seg.), una metrica Hermitiana reale in uno spazio S a $2(n-1)$ dimensioni è definita da una forma del tipo

$$(47) \qquad x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + \dots + x_{n-1} x_{n-1}^0 \pm x_n x_n^0,$$

ed ha l' elemento lineare

$$(48)\quad ds^2 = \mp k^2 \frac{\sum\limits_1^{n-1} \xi_i\, d\xi_i^0 \sum\limits_1^{n-1} \xi_i^0 d\xi_i - (\sum\limits_1^{n-1} \xi_i \xi_i^0 \pm 1) \sum\limits_1^{n-1} d\xi_i\, d\xi_i^0}{(\sum\limits_1^{n-1} \xi_i \xi_i^0 \pm 1)^2} \quad (k = \text{cost. reale}),$$

dove è $\xi_t = \frac{x_t}{x_n}$ $(t = 1, 2, \ldots, n-1)$; questo elemento lineare, quando si ponga $\xi_t = u_t + i\, v_t$, diventa una forma differenziale quadratica definita positiva delle u_t, v_t. Le proiettività sulle x, che lasciano fissa la (47), definiscono dei movimenti per la nostra metrica. Lo studio di questi movimenti, lo studio delle geodetiche e delle linee geodetiche si compiono con metodo affatto simile a quello seguito per gli spazii a curvatura costante.

I punti a distanza infinita sono rappresentati nello spazio euclideo Σ, in cui le u_t, v_t sono coordinate cartesiane ortogonali, dall' ipersfera I definita dalla

$$\sum_1^{n-1} (u_t^2 + v_t^2) \pm 1 = 0.$$

E la metrica è reale in tutto Σ, se vale il segno superiore, ossia se I è completamente immaginaria. La metrica è reale soltanto nella regione R dei punti interni a I, se vale il segno inferiore, ossia se I è reale.

Se $n = 2$, la nostra metrica è una metrica a curvatura costante, rappresentata conformemente in Σ.

Se $n > 2$ diremo *varietà sistatica* ogni varietà a 2 dimensioni, passante per *almeno* uno, e quindi per infiniti punti, ove la nostra metrica è reale, la quale sia definita da $n - 2$ equazioni lineari indipendenti sulle x

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}\, \xi_k + a_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2) \ (a = \text{cost.})$$

le quali, scindendo la parte reale dall' immaginaria, equivalgono a $2(n-2)$ equazioni lineari reali sulle variabili u_t, v_t. Con questa definizione si dimostra che (*):

(*) Cfr. la nota dell' A.: « *Sulle metriche Hermitiane* » pubblicata nei *Rendic. dell' Istituto Veneto* (1903).

La geodetica che congiunge due punti A, B è quel cerchio γ che passa per A e B e taglia ortogonalmente il cerchio C, in cui la varietà sistatica passante per A e B interseca I. Se D, E sono i punti d' intersezione di C e γ, il logaritmo del birapporto dei quattro punti A, B, D, E del cerchio γ è, a meno d' un fattore costante, uguale alla distanza geodetica $A\,B$.

Daremo ora alcune formole, assai importanti per gli studi, che faremo più tardi.

Osserviamo che quei movimenti nella nostra metrica, che lasciano fisso il punto O di coordinate $u_i = v_i = 0\,(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ hanno in Σ per immagine dei movimenti euclidei, lascianti fissa l'origine $u_i = v_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Le geodetiche uscenti da O hanno in Σ per immagine delle rette. Punti equidistanti da O hanno in Σ per immagine punti equidistanti dall'origine O'. Una ipersfera L nella nostra metrica di centro O e di raggio ρ (cioè il luogo dei punti che nella nostra metrica hanno una distanza ρ da O) ha in Σ per immagine una ipersfera L' col centro nell'origine O'. Sia R il raggio (euclideo) di L'. Noi vogliamo trovare anzitutto che relazione passa tra ρ ed R per il caso che I sia reale e che quindi nella (48) valgano i segni inferiori. Alla ipersfera L' appartiene il punto A', di coordinate

$$u_1 = R,\ v_1 = u_2 = v_2 = \ldots = u_{n-1} = v_{n-1} = 0.$$

Il segmento $O' A'$ della retta $v_1 = u_2 = v_2 = \ldots = u_{n-1} = v_{n-1} = 0$ è immagine di un segmento $O\,A$ di geodetica, raggio di L. La lunghezza ρ è data dunque dall'integrale

$$\rho = \int d\,s$$

esteso al segmento $O' A'$. Per la (48) si ha perciò

$$(49)\quad \rho = k \int_0^R \frac{d\,u}{(1-u^2)} = \frac{k}{2} \int_0^R \left(\frac{1}{u_1+1} - \frac{1}{u_1-1}\right) d\,u_1 = \frac{k}{2} \log \frac{1+R}{1-R}$$

equivalente alla:

$$(49)'\qquad R = \frac{e^{\frac{\rho}{k}} - e^{-\frac{\rho}{k}}}{e^{\frac{\rho}{k}} + e^{-\frac{\rho}{k}}} = \operatorname{tangh} \frac{\rho}{k}.$$

Calcoliamo ora il volume v (cfr. § 6, pag. 29 e 30) della ipersfera L, sempre nell'ipotesi che I sia reale.

Dovremo anzitutto calcolare il discriminante del nostro elemento lineare, considerato come forma quadratica dei differenziali delle variabili indipendenti. Ora l'elemento (48) è una forma Hermitiana delle $n - 1$ variabili $d\,\xi_i$; e come tale avrà il discriminante

$$\Delta = k^{2(n-1)} \frac{\begin{vmatrix} \xi_1\xi_1^0 - S & \xi_1\xi_2^0 & \xi_1\xi_3^0 & \dots & \xi_1\xi_{n-1}^0 \\ \xi_2\xi_1^0 & \xi_2\xi_2^0 - S & \xi_2\xi_3^0 & \dots & \xi_2\xi_{n-1}^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n-1}\xi_1^0 & \xi_{n-1}\xi_2^0 & \xi_{n-1}\xi_3^0 & \dots & \xi_{n-1}\xi_{n-1}^0 - S \end{vmatrix}}{S^{2(n-1)}},$$

dove si è posto $S = \sum \xi_i \xi_i^0 - 1$. Se noi consideriamo l'elemento (48) come forma quadratica delle $2\,n - 2$ variabili $d\,\xi_i$, $d\,\xi_i^0$, il suo discriminante ***sarà uguale, a meno di un fattore numerico, al quadrato di*** Δ. Comincieremo dunque dal calcolo di Δ, e quindi dal calcolo del determinante, che compare a numeratore nella formola precedente. Togliendo dalla i^{esima} $(i = 2, 3, \dots, n-1)$ riga di questo determinante la prima riga moltiplicata per $\frac{\xi_i}{\xi_1}$, troviamo che esso è uguale a

$$\left(\frac{S}{\xi_1}\right)^{n-2} \begin{vmatrix} \xi_1\xi_1^0 - S & \xi_1\xi_2^0 & \xi_1\xi_3^0 & \dots & \xi_1\xi_{n-1}^0 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n-1} & 0 & 0 & \dots & -\xi_1 \end{vmatrix}.$$

Aggiungendo nel nuovo determinante ora scritto alla prima riga tutte le altre, moltiplicate rispettivamente per $\xi_2^0, \xi_3^0, \dots, \xi_{n-1}^0$, troviamo che la precedente espressione è uguale a

$$(-1)^{n-2} S^{n-2}$$

e che quindi

$$\Delta = (-1)^{n-2} k^{2(n-1)} S^{-n}.$$

Il discriminante del nostro elemento lineare, quando si assumano le ξ_i, ξ_i^0 come variabili indipendenti, è quindi, a meno di

un fattore costante uguale a S^{-2n}. Altrettanto avverrà perciò del discriminante del nostro elemento lineare, quando si assumano a variabili coordinate le variabili *reali* $u_i = \frac{\xi_i + \xi_i^0}{2}$, $v_i = \frac{\xi_i - \xi_i^0}{2i}$. Questo discriminante sarà uguale a

$$\frac{\lambda^2}{S^{2n}} = \frac{\lambda^2}{\left[\sum_1^{n-1}(u_i^2 + v_i^2) - 1\right]^{2n}} \qquad (\lambda = \text{cost.})$$

E il volume della ipersfera L sarà uguale all'integrale di

$$\lambda \frac{1}{\left[-\sum_1^{n-1}(u_i^2 + v_i^2) + 1\right]^n} d\,u_1\, d\,v_1\, d\,u_2\, d\,v_2 \ldots . d\,u_{n-1}\, d\,v_{n-1}$$

esteso a tutta la ipersfera L'. Per trasformare questa espressione useremo coordinate polari in Σ, indicando con s la distanza euclidea da un punto generico di Σ all'origine e con σ la distanza geodetica corrispondente nella nostra metrica. Sarà

$$s^2 = \Sigma\,(u_i^2 + v_i^2)$$
$$s = \operatorname{tangh}\frac{\sigma}{k}.$$

Il discriminante sopra calcolato sarà uguale a

$$(50) \qquad \lambda^2 \frac{1}{(1 - s^2)^{2n}} = \lambda^2 \cosh^{4n}\frac{\sigma}{k} = \lambda^2 \left(\frac{e^{\frac{\sigma}{k}} + e^{-\frac{\sigma}{k}}}{2}\right)^{4n} > \frac{\lambda^2}{2^{4n}} e^{4n\frac{\sigma}{k}}.$$

L'espressione $d\,u_1\, d\,v_1 \ldots . d\,u_{n-1}\, d\,v_{n-1}$ è l'elemento di volume in Σ. Quindi, se con $d\,w$ indico l'elemento d'area di una ipersfera di Σ di raggio uguale all'unità, a questa espressione potrò sostituire la

$$s^{2n-3}\, d\,w\, d\,s.$$

E se con w indico l'area totale dell'ipersfera citata, il volume v di L nella nostra metrica sarà dato dalla

$$(51) \qquad v = \lambda\, w \int_0^R \frac{s^{2n-3}}{(1 - s^2)^n}\, d\,s.$$

418789

Poichè $s < R < 1$ avremo

$$v < \lambda w \int_0^R \frac{ds}{(1-s)^n} < \frac{\lambda w}{n-1} \left(\frac{1}{1-R}\right)^{n-1}.$$

Per la (49)' si trova successivamente, indicando con μ una costante:

$$v < \frac{\lambda w}{2^{n-1}(n-1)} \left(1 + e^{\frac{2\rho}{k}}\right)^{n-1}$$

$$(51)' \qquad v < \mu\, e^{\frac{2}{k}(n-1)\rho}.$$

Osservazione. — Tanto le metriche Hermitiane, che le metriche a curvatura costante si possono considerare come caso particolare delle seguenti metriche generali. Siano dati in uno spazio euclideo rappresentativo Σ una ipersfera I e un sistema di piani S_2, tali che per due punti generici passi uno e un solo piano S_2 del sistema. Definiamo nella nostra metrica come distanza di due punti infinitamente vicini A, B il logaritmo del birapporto k così definito. Si prenda il piano S_2, che passa per A, B e si tracci il cerchio C, che giace in questo piano e taglia ortogonalmente l'intersezione di questo piano con I in due punti D, E. Per birapporto k si assuma il birapporto dei quattro punti A, B, D, E del cerchio C. Se il sistema dei piani S_2 è il sistema dei piani, che passano per il centro di I, la metrica, che otteniamo, è a curvatura costante. Se esso è un sistema di piani sistatici rispetto a una metrica Hermitiana, otteniamo una metrica Hermitiana, ecc. Supponiamo che Σ sia a quattro dimensioni; e siano Σ_3, Σ'_3 due iperpiani di Σ, in ciascuno dei quali esista un complesso lineare. Noi potremo scegliere in Σ come sistema di piani S_2 quel sistema di piani, che intersecano tanto Σ_3 come Σ'_3 in un raggio del corrispondente sistema lineare. Se i due complessi lineari sono singolari, con assi in posizione opportuna rispetto a I, la metrica è Hermitiana. Se di più gli assi dei due complessi si incontrano nel centro di I, la metrica è a curvatura costante. Questo esempio mi fu gentilmente suggerito dal chiarissimo Prof. M. Pieri.

§ 16. — Metriche miste.

Abbiamo già definito al § 6 le metriche miste; ora faremo alcune osservazioni per il caso che le metriche parziali siano Hermitiane. Premetteremo alcune definizioni, per poter riuscire più chiari. Sia $A = \sum_i A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ una metrica mista in

uno spazio S. Le forme A_i siano forme differenziali quadratiche nelle variabili $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}$. Le variabili $x^{(i)}$ siano indipendenti dalle $x^{(h)}$ per $i \neq h$; tra di loro invece le $x^{(i)}$ possano essere legate da qualche relazione. Consideriamo ora k spazii $S_1, S_2, \ldots, S_k$, in cui le $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ siano rispettivamente le variabili coordinate. Sia B un punto $x_h^{(i)} = a_h^{(i)}$ dello spazio (*totale*) S, in cui *tutte* le x sono le variabili coordinate, e in cui vige la metrica definita da A. Nello spazio S_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ esisterà un punto B_i, le cui coordinate sono precisamente $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_{n_i}^{(i)}$. Questo punto si dirà la *proiezione* di B su S_i. Evidentemente:

Un punto dello spazio totale S individua le sue proiezioni sui k spazii parziali, e ne è individuato.

Una linea l di S avrà sugli spazii parziali per proiezioni delle linee l_i, luogo delle proiezioni dei punti di l.

Nello spazio S_i immaginiamo esistente la metrica definita dall'elemento lineare parziale A_i. Avremo:

La lunghezza di una linea infinitesima in S è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle lunghezze delle sue proiezioni, e quindi non è maggiore della somma delle lunghezze delle sue proiezioni. Quindi:

La lunghezza di una linea qualunque in S non è maggiore della somma delle lunghezze delle sue proiezioni.

I metodi del calcolo delle variazioni dimostrano facilmente che una geodetica in S ha come proiezione su S_i una geodetica di S_i. Quindi:

La distanza geodetica di due punti B, C di S non è maggiore della somma delle distanze geodetiche dei punti B_i, C_i in S_i (quando si indichino al solito con B_i, C_i le proiezioni di B, C su S_i).

Supponiamo ora che la metrica definita da A_i in S_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sia Hermitiana. La metrica definita da A in S si dirà *Hermitiana mista*. Sia data in S una ipersfera V, luogo dei punti che hanno una stessa distanza geodetica ρ da un punto fisso O (*centro* della V). Consideriamo in S_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ la ipersfera V_i di raggio ρ, che ha per centro la proiezione O_i di O su S_i.

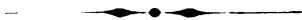
Un punto B, interno a V, avrà su S_i per proiezione un punto
interno a V_i. Il volume v di V sarà minore del prodotto d
volumi v_i di V_i. Se la metrica esistente in S_i è una metri
Hermitiana iperbolica, sarà (§ 15, pag. 100) $v_i < \mu_i e^{\nu_i \rho}$, dove μ_i,
sono costanti positive. Quindi:

$$(52) \qquad v < v_1 v_2 \ldots . v_k < \mu e^{\nu \rho} \qquad (\mu, \nu \text{ costanti positive})$$

Il valore D del discriminate di A in un punto B di S è
guale al prodotto dei valori D_i dei discriminanti di A_i nei pun
B_i, proiezioni di A sugli spazii S_i. Se noi indichiamo con σ (
la distanza geodetica non euclidea, misurata nella metrica A (
dall' origine al punto B (B_i), abbiamo $\sigma \leq \sum_i \sigma_i$. Di più, per la (5
del § 15, $|D_i| \geq h_i e^{l_i \sigma_i}$, (dove h_i, l_i sono costanti positive).

Quindi:

$$(53) \qquad |D| = \prod_i |D_i| \geq h e^{l\sigma}, \text{ dove } h, l \text{ sono costanti positiv}$$

Questa formola avrà una grande importanza nel corso
questo trattato.

PARTE SECONDA.

I PROBLEMI FONDAMENTALI, I GRUPPI PROPRIAMENTE DISCONTINUI E LE LORO APPLICAZIONI ARITMETICHE

Capitolo Quarto. — **I problemi fondamentali.**

§ 17. — **Enunciato dei problemi fondamentali e primi teoremi.**

In questo paragrafo vogliamo dare la definizione *dei gruppi propriamente discontinui.* Per mostrare in modo semplice e spontaneo l'utilità di considerare tali gruppi particolari, noi potremmo seguire due vie: l'una che parte dallo studio della riduzione delle forme algebriche, di cui ci occuperemo più avanti, l'altra, che parte da alcuni problemi di indole funzionale.

Per molte ragioni di opportunità e semplicità noi seguiremo questa seconda via: ecco perchè questo capitolo si occupa di questioni, che troverebbero sede più naturale nella terza parte del presente trattato.

Le applicazioni funzionali dei gruppi discontinui sono di due specie: applicazioni alle funzioni di variabile reale, e applicazioni alla teoria delle funzioni analitiche di variabile complessa. Il problema fondamentale per le applicazioni alla teoria delle funzioni analitiche è il seguente:

PROBLEMA A. — *Sia G un gruppo discontinuo di trasformazioni birazionali su n variabili (indipendenti) complesse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e Γ un gruppo su m variabili $z_1, z_2, \ldots, z_m$. E siano i gruppi G, Γ in isomorfismo oloedrico o meriedrico, in guisa che a una trasformazione di G corrisponda una e una sola trasformazione di Γ. Si costruiscano tutti i possibili sistemi di m funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_m$ analitiche uniformi delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tali che quando le x subiscono una trasformazione qualunque T di G, le z subiscano la trasformazione corrispondente τ di Γ.*

Se il gruppo Γ si riduce alla sola trasformazione identica, questo problema diventa il secondo problema fondamentale.

PROBLEMA B. — *Se G è un gruppo discontinuo di trasformazioni birazionali su n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si costruiscano tutte le possibili funzioni analitiche uniformi delle x invarianti per G, ossia che restano invariate quando le x subiscono una trasformazione di G.*

Più particolarmente noi ci proporremo di *determinare,* se esistono, *tutti i sistemi di n funzioni analitiche uniformi e indipendenti, invarianti per G.*

I problemi analoghi, quando G è un gruppo continuo, o contiene come sottogruppo un gruppo continuo, escono dal campo delle ricerche, che ci siamo proposti.

Le funzioni che risolvono il problema A si diranno funzioni *zeta-cremoniane;* quelle che risolvono il problema B si diranno *cremoniane.* Se G è un gruppo lineare, o più particolarmente se G è un gruppo fuchsiano o un gruppo kleiniano, o un gruppo (iperfuchsiano) di movimenti in una metrica Hermitiana reale, e se Γ è un gruppo di trasformazioni lineari intere omogenee, le funzioni che risolvono il problema A si diranno *zeta-automorfe*, quelle che risolvono il problema B *automorfe.* Noi, pur senza perdere mai di vista il problema generale, ci occuperemo specialmente delle funzioni automorfe e zeta-automorfe; le quali sole hanno finora ricevuto applicazioni importanti alla teoria

delle equazioni differenziali (*). Però è da avvertire che lo stesso studio delle funzioni automorfe rende necessaria la considerazione di certe funzioni cremoniane, appunto come lo studio delle funzioni ellittiche porta alla considerazione di alcune funzioni automorfe (le funzioni modulari).

Tra le funzioni generalmente note esistono delle funzioni, che risolvono, in casi particolari, qualcuno dei precedenti problemi.

Così p. es. le funzioni trigonometriche di una variabile x sono funzioni invarianti per le trasformazioni del gruppo

$$x' = x + 2 n \pi$$

dove n è un qualunque numero intero.

Le funzioni ellittiche di una variabile x a periodi 2ω, $2\omega'$ sono funzioni invarianti per le trasformazioni del gruppo

$$x' = x + 2 m \omega + 2 n \omega'$$

dove m, n sono interi qualunque.

La funzione $z = x^n$ (n intero) è una funzione che subisce la trasformazione τ ($z' = a^n z$) quando la x subisce la trasformazione T ($x' = a\, x$). E queste due trasformazioni τ, T generano due gruppi ciclici Γ, G isomorfi.

Noi non sappiamo risolvere i problemi A, B in tutta la loro generalità. Nè i gruppi G, Γ possono essere arbitrarii. Per farci una prima idea di alcune condizioni, a cui essi debbono soddisfare, dimostreremo alcuni teoremi.

(*) La letteratura relativa alle funzioni cremoniane e zetacremoniane è ben scarsa. Cfr. l'indice bibliografico, dove si troveranno citati i lavori fondamentali di Poincaré e Picard, ed altri, che ne perfezionano in qualche punto i risultati.

Teor. I. — ***Se una funzione analitica uniforme z delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è invariante per un gruppo discontinuo G di trasformazioni lineari sulle x, contenente trasformazioni infinitesime (di*** Klein), ***allora la z è anche invariante per le trasformazioni di un gruppo continuo G' di trasformazioni lineari*** (Cfr. § 5, pag. 17 e 22). Premetteremo alcune osservazioni generali.

La più generale trasformazione lineare infinitesima di S. Lie sulle x è data dalle (cfr. § 5, pag. 18-19):

$$x'_i = \frac{\sum_k a_{ik} x_k + a_{i,n+1}}{\sum_k a_{n+1,k} x_k + a_{n+1,n+1}} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

dove

$$a_{ik} = \lambda\, \delta_{ik} \quad (i \neq k) \qquad a_{ii} = 1 + \lambda\, \delta_{ii} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n+1)$$

quando con δ_{ik} si indichino costanti finite, e con λ un parametro infinitesimo. Trascurando infinitesimi d'ordine superiore, la precedente equazione si può scrivere:

$$x'_i = x_i + \lambda \left[\sum_k \delta_{ik} x_k + \delta_{i,n+1} - \sum_k \delta_{n+1,k} x_i x_k - \delta_{n+1,n+1} x_i\right]$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

Il simbolo di una tale trasformazione infinitesima è

$$\sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

dove

$$\xi_i = \sum_k \delta_{ik} x_k + \delta_{i,n+1} - \sum_k \delta_{n+1,k} x_i x_k - \delta_{n+1,n+1} x_i.$$

Quindi (§ 5, pag. 20-21) condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione z della x sia invariante per un gruppo lineare continuo G' sulle x, è che valga un'equazione del tipo:

$$(1) \quad \sum_{i,k} \alpha_{ik} x_k \frac{\partial z}{\partial x_i} + \sum_i \alpha_i \frac{\partial z}{\partial x_i} - \sum_k \beta_k \sum_i x_k\, x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

(dove le α, β sono costanti non tutte nulle).

Indicheremo con $x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \ldots, x_n^{(l)}$ $(l = 1, 2, \ldots, n^2 + 2n)$ $n(n+2)$ sistemi generici di valori per le x, scelti nel campo, dove si immagina definita e regolare la funzione z. Indicheremo con

$p_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o con $p_i(a)$ il valore assunto da $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ per $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$ dove le a sono quantità generiche.

Scriviamo le (1) successivamente per $x_i = x_i^{(1)}, x_i = x_i^{(2)}, \ldots,$ $x_i = x_i^{(n^2+2n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Otterremo così $n^2 + 2n$ equazioni lineari e omogenee tra le $n^2 + 2n$ costanti α, β. Eliminando queste costanti, troviamo che deve essere identicamente nullo il determinante $\Delta(x)$ di ordine $n^2 + 2n$, la cui l^{esima} riga ($l = 1, 2, \ldots,$ $n^2 + 2n$) ha ordinatamente per termini le $n^2 + 2n$ quantità

$$x_k^{(l)} p_i(x^{(l)}) \qquad p_i(x^{(l)}) \qquad x_k^{(l)} \sum_i x_i^{(l)} p_i(x^{(l)}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

E viceversa, se questo determinante $\Delta(x)$ è identicamente nullo, cioè se $\Delta(x)$ è nullo, comunque siano state scelte le quantità generiche $x_i^{(l)}$, si potranno trovare delle costanti α, β non tutte nulle tali che la (1) sia un'identità. Abbiamo dunque in particolare:

Se la z non é invariante per un gruppo continuo lineare, il determinante $\Delta(x)$ non è identicamente nullo, e quindi sarà

$$\Delta(x) \neq 0$$

se le $x_i^{(l)}$ sono scelte in modo generico.

In tal caso, scelte le $x_i^{(l)}$ in modo generico, ma determinato, il determinante $\Delta(x)$ resterà differente da zero, se in tutti i suoi termini noi sostituiamo alle $p_k(x^{(l)})$ delle quantità π_{kl}, tali che:

$$(2) \qquad | p_k(x^{(l)}) - \pi_{kl} | < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

dove ε è una costante positiva sufficientemente piccola. Indicheremo con $\Delta'(x)$ il nuovo determinante così ottenuto.

Supponiamo ora che, essendo $\Delta(x) \neq 0$, z sia invariante per un gruppo discontinuo G contenente trasformazioni infinitesime. Vedremo che ciò è assurdo. Infatti in questa ipotesi, comunque siano state scelte le $x_i^{(l)}$, noi potremo trovare in G una trasformazione T

$$x'_i = \frac{\sum_k a_{ik} x_k + a_{i,n+1}}{\sum_k a_{n+1,k} x_k + a_{n+1,n+1}}$$

così poco differente dall'identità che i punti $x_i^{(l)}$ siano portati in punti vicini a piacere, ossia che le quantità $y_i^{(l)}$ definite dalle

$$(3) \qquad y_i^{(l)} = \frac{\sum_k a_{ik}\, x_k^{(l)} + a_{i,n+1}}{\sum_k a_{n+1,k}\, x_k^{(l)} + a_{n+1,n+1}}$$

appartengano al campo ove è definita la z, e soddisfacciano alle:

$$(4) \qquad 0 < | x_i^{(l)} - y_i^{(l)} | < \delta,$$

dove δ è una costante, per ora indeterminata, che potremo scegliere piccola a piacere. Per ipotesi avremo:

$$z(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \ldots, x_n^{(l)}) = z(y_1^{(l)}, y_2^{(l)}, \ldots, y_n^{(l)}).$$

La funzione

$$\theta_l(t) = z[x_1^{(l)} + t(y_1^{(l)} - x_1^{(l)}); \ldots; x_n^{(l)} + t(y_n^{(l)} - x_n^{(l)})]$$

della variabile t si può supporre definita almeno per tutti i valori *reali* di t, compresi tra zero e uno, ed ha valori uguali per $t = 0$ e per $t = 1$. La sua derivata rispetto a t è

$$\theta'_l(t) = \sum_{k=1}^{n} (y_k^{(l)} - x_k^{(l)})\, p_k [x_1^{(l)} + t(y_1^{(l)} - x_1^{(l)}); \ldots; x_n^{(l)} + t(y_n^{(l)} - x_n^{(l)})].$$

Porremo:

$$y_k^{(l)} - x_k^{(l)} = \rho_{kl}\, e^{i\alpha_{kl}} \qquad (\rho_{kl}, \alpha_{kl} \text{ costanti reali})$$
$$\theta_l(t) = \xi_l(t) + i\,\eta_l(t)$$

dove le ξ_l, η_l sono funzioni *reali* del parametro *reale* t, variabile tra 0 ed 1.

Le funzioni $\xi_l(t)$, $\eta_l(t)$ riprendono lo stesso valore per $t = 0$ e per $t = 1$. Il teorema della media per le funzioni di variabili reale ci dice che la $\xi'_l(t)$ sarà nulla per $t = t_1$ e la $\eta'_l(t)$ sarà nulla per $t = t_2$, dove $0 < t_1 < 1$, $0 < t_2 < 1$.

Indicheremo, se μ è una quantità complessa qualsiasi, con $R(\mu)$ e con $I(\mu)$ rispettivamente il coefficiente della parte reale, e quello della parte immaginaria di μ, cosicchè è

$$\mu = R(\mu) + i\,I(\mu) \quad [R(\mu), I(\mu) \text{ quantità reali}].$$

Porremo:

$$p_k\,[x_1^{(l)} + t\,(y_1^{(l)} - x_1^{(l)}); \ldots ; x_n^{(l)} + t\,(y_n^{(l)} - x_n^{(l)})] = p_{kl}\,(t).$$

Posto poi $p_{lk}\,(t_1) = \pi'_{kl}$, $p_{kl}\,(t_2) = \pi''_{kl}$, avremo:

$$(5) \quad \begin{cases} \xi'_l\,(t_1) = \Sigma\, \rho_{kl}\, R\,(e^{i\alpha_{kl}}\,\pi'_{kl}) = 0 \\ \eta'_l\,(t_2) = \Sigma\, \rho_{kl}\, I\,(e^{i\alpha_{kl}}\,\pi''_{kl}) = 0. \end{cases}$$

Ora è ben chiaro che esiste una variabile η, infinitesima per $\delta = 0$, tale che

$$|\, R\,(e^{i\alpha_{kl}}\,\pi'_{kl}) - R\,(e^{i\alpha_{kl}}\,p_k\,(x^{(l)}))\,| < \frac{\eta}{\sqrt{2}}$$

$$|\, I\,(e^{i\alpha_{kl}}\,\pi''_{kl}) - I\,(e^{i\alpha_{kl}}\,p_k\,(x^{(l)}))\,| < \frac{\eta}{\sqrt{2}}\,.$$

Infatti, se δ tende a zero, i punti $x_k^{(l)} + t_1\,(y_k^{(l)} - x_k^{(l)})$ e $x_k^{(l)} + t_2\,(y_k^{(l)} - x_k^{(l)})$ $(0 < t_1 < 1;\ 0 < t_2 < 1)$ tendono per la (4) al punto $x_k^{(l)}$; e i valori π'_{kl}, π''_{kl}, assunti nei punti precedenti dalle p_k, tendono alle $p_k\,(x^{(l)})$.

Noi fisseremo ora la quantità δ, che era rimasta in nostro arbitrio, così piccola che $\eta < \varepsilon$.

Le quantità π_{kl} definite dalle:

$$\pi_{kl} = e^{-i\alpha_{kl}}\,[R\,(e^{i\alpha_{kl}}\,\pi'_{kl}) + i\,I\,(e^{i\alpha_{kl}}\,\pi''_{kl})]$$

soddisferanno alla (2). Dalle precedenti disuguaglianze si trae infatti:

$$|\,\pi_{kl} - p_k\,(x^{(l)})\,| = |\,e^{i\alpha_{kl}}\,\pi_{kl} - e^{i\alpha_{kl}}\,p_k\,(x^{(l)})\,| =$$

$$= \sqrt{[R\,(e^{i\alpha_{kl}}\,\pi_{kl} - e^{i\alpha_{kl}}\,p_k\,(x^{(l)}))]^2 + [I\,(e^{i\alpha_{kl}}\,\pi_{kl} - e^{i\alpha_{kl}}\,p_k\,(x^{(l)}))]^2}$$

$$= \sqrt{[R\,(e^{i\alpha_{kl}}\,\pi'_{kl}) - R\,(e^{i\alpha_{kl}}\,p_k\,(x^{(l)}))]^2 + [I\,(e^{i\alpha_{kl}}\,\pi''_{kl}) - I\,(e^{i\alpha_{kl}}\,p_k\,(x^{(l)}))]^2}$$

$$< \sqrt{\frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2}{2}} = \eta < \varepsilon.$$

Ora, aggiungendo alla prima delle (5) la seconda moltiplicata per i si trae:

$$\sum_k \rho_{kl}\,e^{i\alpha_{kl}}\,\pi_{kl} = 0,$$

ossia

$$\sum_k (y_k^{(l)} - x_k^{(l)})\,\pi_{kl} = 0;$$

ove, ricordiamolo, le π_{kl} soddisfano alle (2).

Questa equazione, per le (3), diventa:

$$\sum_{k=1}^{n} \pi_{kl} \left[\sum_{i=1}^{n} c_{ki}\, x_i^{(l)} + c_{k,n+1} - x_k^{(l)} \sum_{i=1}^{n} c_{n+1,i}\, x_i^{(l)} \right] = 0$$

dove $c_{ik} = a_{ik}$ se $i \neq k$, $c_{ii} = a_{ii} - a_{n+1,n+1}$.

Siccome per ipotesi la trasformazione T è differente dall'identità, le costanti c non possono essere tutte nulle. Scrivendo le precedenti equazioni per $l = 1, 2, \ldots, n^2 + 2n$ ed eliminando le $n(n+2)$ costanti c dalle $n(n+2)$ equazioni lineari nelle c così ottenute, troviamo $\bar{\Delta} = 0$, quando, secondo la convenzione già fatta, con $\bar{\Delta}$ si indichi il determinante $\Delta(x)$, in cui alle $p_k(x^{(l)})$ si siano sostituite le π_{kl}. Ma se ε è stato scelto abbastanza piccolo, dall'ipotesi $\Delta(x) \neq 0$ segue, come dicemmo, $\bar{\Delta} \neq 0$. Ciò contraddice al precedente risultato: cosicchè resta dimostrato che la funzione z non può ammettere trasformazioni lineari infinitesime di Klein, senza ammettere trasformazioni lineari infinitesime di Lie e quindi anche un gruppo continuo lineare di Lie.

Noi abbiamo qui parlato di gruppi lineari generali. Possiamo dare al nostro teorema forme particolarmente semplici, limitandoci a gruppi particolari: p. es. ai gruppi di traslazioni cioè ai gruppi, le cui trasformazioni sono del tipo:

$$x'_i = x_i + a_i \qquad (a_i = \text{cost.})$$

Una funzione z, che sia invariante per una tal trasformazione, si suol chiamare una funzione che ammette ***il sistema di periodi*** a_i. Un gruppo *continuo* di traslazioni ha evidentemente per trasformazioni infinitesime generatrici delle trasformazioni del tipo

$$\Sigma\, k_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (k_i = \text{cost.})$$

Una trasformazione di questo tipo si può evidentemente, ***con*** *una trasformazione lineare intera omogenea* ***sulle*** x, trasformare in un'altra trasformazione infinitesima del tipo $\frac{\partial}{\partial x_1}$. ***Una funzione*** *$z$, che ammetta questa trasformazione* ***infinitesima soddisfa*** *alla* $\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0$, ossia *è indipendente da* x_1.

Vale il teorema, che si può dimostrare con ragionamenti analoghi ai precedenti.

Teorema I.bis — « *Una funzione z, analitica uniforme delle x_1, x_2, ..., x_n, invariante per un gruppo discontinuo di traslazioni contenente trasformazioni infinitesime, o più brevemente, una funzione uniforme, che ammette sistemi infinitesimi di periodi, ammette un gruppo continuo di Lie di traslazioni, e con un cambiamento lineare intero di variabili si può ottenere che la z sia funzione di sole $n-1$ variabili $x_2, x_3, \ldots, x_n$ (o di un numero ancora minore di variabili)* (*).

Siano le $x_1 \ldots . x_n$ n variabili indipendenti. Se le x sono reali, noi penseremo spesso a uno spazio S, in cui le x sono variabili coordinate; se invece le x sono variabili complesse, noi indicheremo con S uno spazio, in cui sono coordinate reali la parte reale e la parte immaginaria delle x. In ogni caso a ogni sistema di valori delle x corrisponde un punto reale in S e viceversa. Se z è una funzione delle x, noi potremo dunque parlare del valore di z in un punto di S, ecc.

Teorema II. — *Se le $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sono n funzioni analitiche uniformi indipendenti delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, invarianti per un gruppo G di trasformazioni sulle x, allora, preso un punto generico del campo, ove sono definite le w, esiste un intorno α sufficientemente piccolo di A, tale che due punti distinti qualunque B, C di questo intorno non sono mai equivalenti rispetto a G* (*ossia che nessuna trasformazione di G può portare un punto B di α in un altro punto C di α*).

(*) Questi teoremi, che abbiamo dimostrato per funzioni complesse e per trasformazioni lineari, si estendono anche a funzioni di variabili reali, e alle trasformazioni di un qualsiasi gruppo finito continuo di Lie: *Se una funzione z uniforme delle variabili (reali o complesse) x_1 x_2 .... x_n è invariante per un gruppo discontinuo G di trasformazioni sulle x appartenenti ad un gruppo H continuo finito di Lie e se G contiene trasformazioni infinitesime (di Klein), la z è anche invariante per tutto un gruppo ad un parametro almeno appartenente a H.*

Se infatti le $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sono indipendenti, allora, indicando con p_{ik} il valore di $\frac{\partial w_i}{\partial x_k}$ nel punto generico A, sarà:

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Questo determinante sarà pure differente da zero se noi alle p_{ik} sostituiamo delle quantità π_{ik}, tali che

$$| p_{ik} - \pi_{ik} | < \varepsilon \tag{6}$$

dove ε è una costante positiva sufficientemente piccola. Ora indichiamo con x_i le coordinate di A, e con y_i, z_i le coordinate di due punti B, C presi in un intorno α sufficientemente piccolo di A. Sarà

$$| y_i - x_i | < \delta \qquad | z_i - x_i | < \delta$$

dove δ è una costante, che tende a zero con α.

Se B e C sono equivalenti rispetto a G, sarà per ipotesi

$$w_1 (y_i) = w_1 (z_i); \; w_2 (y_i) = w_2 (z_i); \; \ldots; \; w_n (y_i) = w_n (z_i).$$

Dalla l^{esima} di queste equazioni si trae che la funzione $\theta_l (t) = w_l [z_i + t (y_i - z_i)]$ assume valori uguali per $t = 0$ e per $t = 1$. Se ne deduce, con metodo affatto simile a quello usato per dimostrare il teor. I, che, scelto δ sufficientemente piccolo, si possono trovare delle quantità π_{ik} tali che $\sum_k \pi_{ik} (y_k - z_k) = 0$, e che siano soddisfatte le (6). Eliminando da queste equazioni le $(y_k - z_k)$, che non sono tutte nulle, perchè i punti B, C sono distinti per ipotesi, si trova che il determinante delle π_{ik} è nullo, contrariamente a quanto abbiamo prima osservato. La contraddizione dimostra il nostro teorema (*).

(*) Questo teorema è del resto intuitivo. Se le w sono indipendenti, esse si possono assumere in α come variabili coordinate; punti distinti di α avranno coordinate distinte.

Da questo teorema segue immediatamente l'altro:

Teorema II$^{\text{bis}}$. — *Nelle ipotesi del teorema II, il gruppo G non può contenere trasformazioni infinitesime.*

Infatti se G contenesse trasformazioni infinitesime, allora (§ 5, pag. 17) in ogni intorno esisterebbero coppie di punti equivalenti.

Come abbiamo già detto a pag. 104, lo studio delle funzioni invarianti per un gruppo continuo di trasformazioni lineari non fa parte del tema, che ci siamo prefissi. Per il teor. I potremo dunque, nello studio delle funzioni invarianti per un gruppo discontinuo G di trasformazioni lineari, ossia nella risoluzione del problema fondamentale (B) per gruppi G lineari, escludere senz'altro che G contenga trasformazioni infinitesime di Klein. Ma quasi sempre, quando si vogliono studiare le funzioni invarianti per un dato gruppo discontinuo G su n variabili x, la questione di massimo interesse è di trovare, se possibile, proprio n funzioni uniformi ***indipendenti*** invarianti per G. In tal caso il teorema II$^{\text{bis}}$ ci dice che il gruppo G non deve contenere trasformazioni infinitesime; e il teorema II ci dice di più che in un intorno abbastanza piccolo di un punto generico A di S non possono esistere punti distinti equivalenti.

Premetteremo ora alcune definizioni.

Noi diremo che un gruppo G è propriamente discontinuo (*pr. dis.*) *in un punto A dello spazio S, quando:*

1. *Il punto A è lasciato fisso soltanto da un numero finito h di trasformazioni di G* (che noi indicheremo con $T_1, T_2, \ldots, T_h$).

2. *In un intorno sufficientemente piccolo di A non esistono punti, trasformati l'uno dell'altro mediante una trasformazione di G, distinta dalle $T_1, T_2, \ldots, T_h$.*

Se $h = 1$, il punto A è lasciato fisso soltanto dalla trasformazione identica di G; e quindi in un intorno abbastanza piccolo di A non esistono punti *distinti* equivalenti rispetto a G.

Se $h > 1$, e quindi il punto A è lasciato fisso da almeno una

trasformazione T non identica di G, il punto A si dice *polo* della T, o anche *polo* di G.

L'insieme dei poli di una stessa trasformazione non identica T di G si dice *asse* della T, o anche *asse* di G.

Si ammette che nessuna trasformazione non identica T di G possa lasciare fisso un punto A, e tutti i punti di un intorno di A. Se le trasformazioni T di G sono analitiche, o sono movimenti di una metrica, o ipermetrica, vigente nello spazio ambiente, questa ipotesi è necessariamente soddisfatta.

Una regione R dello spazio S si dice *perfetta,* se ogni punto limite di un qualsiasi insieme di punti, appartenenti a R, appartiene ancora a R. P. es., se R è una regione limitata da ipersuperficie, essa è perfetta, *soltanto se i punti delle ipersuperficie contorno si considerano come appartenenti a R.*

Un gruppo G si dice propriamente discontinuo (pr. dis.) in una regione R, se in un intorno sufficientemente piccolo di un punto generico di R non esistono punti distinti equivalenti.

A connettere la presente definizione di gruppo pr. dis. in una regione con quella di gruppo pr. dis. in un punto servirà il seguente

Teorema. — *Se G è un gruppo pr. dis. in tutti i punti di una regione R, in un intorno α abbastanza piccolo di un punto A di R penetra al più un numero finito di assi del gruppo G; un punto generico di R non è lasciato fisso da alcuna trasformazione non identica di S. Il gruppo G sarà dunque pr. dis. in R. In una regione perfetta R', interna a R (*) può esistere al più un numero finito di punti equivalenti a un punto A.*

Dim. — Infatti, se un punto B appartiene all'asse di una trasformazione T di G, in ogni intorno di B esistono punti equivalenti rispetto alla T. Quindi, se in un intorno α di A penetrano gli assi di *infinite* trasformazioni T_1, T_2, ... di G, in α esistono punti equivalenti rispetto alla T_i, qualunque sia i

(*) Si dice che R' è interna a R, se ogni punto di R' appartiene a R.

($i = 1, 2, \ldots$). Ciò è impossibile, se α è abbastanza piccolo, perchè G è pr. dis. in A. Quindi un punto generico B di un intorno α abbastanza piccolo di un qualsiasi punto A di R non è lasciato fisso da alcuna trasformazione non identica di G; e perciò in un intorno abbastanza piccolo di B non esistono punti distinti equivalenti. G è dunque pr. dis. in R.

Per dimostrare l'ultima parte del precedente teorema, si osservi che se in R' vi sono infiniti punti equivalenti ad A, esisterà un punto B ***appartenente*** ad R', in ogni intorno α del quale esistono infiniti punti tra di loro equivalenti $A_1, A_2, A_3 \ldots$. Le trasformazioni di G, che portano A_1 in A_2, o in A_3, ecc., sono in numero infinito: ciò che è assurdo, perchè G è pr. dis. in A.

Notiamo che, se un gruppo G è pr. dis. in tutti i punti di una regione non perfetta R, allora G è pr. dis. tanto in R, quanto nella regione R_1, che si ottiene aggiungendo a R i punti dell'insieme derivato.

Premesse queste definizioni e questi teoremi generali, ritorniamo alle precedenti considerazioni funzionali. Se n funzioni u indipendenti sono invarianti per il gruppo G, noi sappiamo che in un intorno di un punto ***generico*** G non esistono punti equivalenti rispetto a G. Questo gruppo è quindi ***propr. dis. nella regione, in cui sono definite le u.***

Per le ragioni, che abbiamo svolto più sopra, noi studieremo il problema B, (che approfondiremo specialmente nel caso di gruppi G lineari) ammettendo non solo che il gruppo G non contenga trasformazioni infinitesime, ma anche che il gruppo G sia pr. dis.

È dunque per le nostre ricerche di importanza fondamentale il saper rispondere alla seguente domanda:

« ***Quando un dato gruppo G è pr. dis.?*** ».

Da quanto abbiamo detto fin qui, risulta che è condizione ***necessaria*** che il gruppo G sia privo di trasformazioni infinitesime (p. d. t. i.). Questa condizione non è però in generale suf-

ficiente. Nel capitolo seguente daremo alcuni teoremi generali, che bastano nei casi più importanti a far riconoscere ***a priori*** quando un ***gruppo p. d. t. i. è anche pr. dis.***, e danno anzi un metodo per affrontare questa domanda per i più generali gruppi lineari.

Quanto al problema *A*, la condizione che il gruppo *G* sia pr. dis. non sembra essere così essenziale, come per il problema *B*. Tuttavia, per la mancanza di studii più generali, noi ammetteremo che il gruppo *G* sia pr. dis., anche quando vogliamo risolvere il problema *A*.

Come si vede, resta così affatto inesplorato un esteso campo di ricerche, che porteranno forse un giorno la teoria delle funzioni automorfe a una più ampia generalità.

Capitolo Quinto. — **La discontinuità propria dei gruppi.**

§ 18. — Definizioni e lemmi.

Nel § 17 abbiamo già definito il significato delle locuzioni: ***gruppo propriamente discontinuo*** (pr. dis.) ***in un punto, e gruppo pr. dis. in una regione*** *R*. Se un gruppo è pr. dis. in una regione *R*, noi diremo anche che esso ***opera in modo pr. dis. sui punti di*** *R*.

Queste definizioni si possono generalizzare. Sia dato nello spazio *S* (§ 17, pag. 111) un gruppo *G* ed un insieme Σ di varietà *V*, che godano delle seguenti proprietà:

1. Una varietà *V* dipende da un numero ***finito*** di parametri $z_1 \dots z_m$, così che si può porre una corrispondenza biunivoca tra le varietà *V* e i sistemi di valori dei parametri *z*.

2. Una trasformazione *T* di *G* porta una varietà *V* del sistema Σ in un'altra varietà *V* dello stesso sistema Σ.

Noi potremo dire, se V_0 è una delle nostre varietà, per la quale i parametri *z* hanno certi valori $z'_1, z'_2, \dots, z'_m$, che le varietà *V*, a cui corrispondono valori delle *z* soddisfacenti alle

$$| z_i - z'_i | < \varepsilon \qquad (\varepsilon = \text{cost.}),$$

giacciono in un intorno della varietà V_0. Potrebbe darsi che il gruppo G sia tale che in un intorno sufficientemente piccolo di una varietà generica di Σ non esistano due varietà distinte di Σ, equivalenti rispetto a G (trasformate l'una dell'altra mediante una trasformazione di G). Diremo in tal caso che: ***Il gruppo G opera in modo pr. dis. sull'insieme*** Σ, o anche che ***G è pr. dis. nello spazio S, pensato come luogo delle varietà V.***

Così pure noi potremo dire che ***G è pr. dis. nella varietà*** V_0 ***di*** Σ, se questa è lasciata fissa al più da un numero *finito* di trasformazioni di G, e in un intorno sufficientemente piccolo di V_0 non esistono varietà di Σ equivalenti rispetto a una trasformazione di G, distinta dalle trasformazioni, che lasciano fissa V_0.

Queste definizioni costituiscono una semplice estensione delle definizioni, che noi abbiamo date precedentemente, e coincidono con queste, se le V sono varietà a zero dimensioni, e si riducono ai punti dello spazio rappresentativo S.

È ben evidente che: ***un gruppo, che operi in modo pr. dis. su un sistema*** Σ ***di varietà, non può contenere trasformazioni infinitesime, che non trasformino in sè stessa ogni varietà di*** Σ.

E noi dimostreremo il teorema seguente, che è in certo qual modo il reciproco del teorema enunciato testè:

Se G è un gruppo p. d. t. i., contenuto come sottogruppo in un gruppo continuo finito Γ, ***si può in infiniti modi trovare un sistema*** Σ ***di varietà V, su cui il gruppo G operi in modo pr. dis.***

E precisamente si possono scegliere p. es. come varietà V i sistemi di r punti dello spazio S, ossia le varietà a zero dimensioni formate ciascuna di r punti dello spazio S (se r è sufficientemente grande).

Infatti una trasformazione di Γ dipende da un numero *finito* di parametri. Se r è un intero abbastanza grande, una tale trasformazione è quindi determinata, quando si diano (in modo compatibile) i punti trasformati di r punti generici. Se dunque una trasformazione qualsiasi di Γ, p. es. una trasformazione di G, porta r punti di S in r punti infinitamente vicini, essa è una trasfor-

mazione infinitesima. Se dunque G non operasse in modo pr. dis. sulle r^{uple} di punti dello spazio S, esso conterrebbe, contro il supposto, trasformazioni infinitesime.

Così p. es. *un gr. p. d. t. i. di trasformazioni lineari reali* (*complesse*) *su una variabile x opera in modo pr. dis. sulle terne di punti della retta, su cui x è la variabile coordinata* (*del piano complesso della variabile x*).

Sarebbe di grande importanza, *dato un gruppo G p. d. t. i.*, il poter riconoscere *qual' è il più piccolo valore di r tale che G operi in modo pr. dis. sulle r^{uple} di punti di S.* Questa questione non è che una generalizzazione dell'altra di riconoscere quando un gruppo G p. d. t. i. è pr. dis. in S. *Infatti G è pr. dis. in S, allora e allora soltanto che il più piccolo valore possibile di r è l'unità.*

Osserveremo ancora che se S ed S' sono due spazii in corrispondenza biunivoca continua, un gruppo G di trasformazioni in S si potrà considerare come gruppo di trasformazioni in S'. Ed è ben evidente che, se G è pr. dis. in S, esso è anche pr. dis. in S': e viceversa.

§ 19. — I teoremi fondamentali per i gruppi lineari.

Noi ci volgiamo ora a trattare il problema di riconoscere quando un dato gruppo p. d. t. i. è pr. dis., e, più in generale, a risolvere la questione accennata in fine del § 18. Noi ci limiteremo però allo studio di due classi particolari di gruppi:

1. i gruppi di trasformazioni lineari,
2. i gruppi di movimenti in una metrica, o ipermetrica, reale

Cominceremo dal caso dei gruppi lineari, premettendo alcuni lemmi.

Ricordiamo che una forma (polinomio omogeneo) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di grado k nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si dice definita (positiva o negativa) se i suoi coefficienti sono reali, e se essa non è mai nulla, ed ha sempre lo stesso segno ($+$ o $-$), quando alle

si diano valori reali non contemporaneamente nulli. Evidentemente una forma definita è sempre di grado pari.

Lemma I. — *Se f è una forma definita delle x di grado k, si può trovare una costante L, tale che, se $f = M$ quando alle x_i diamo dei valori reali ξ_i, si abbiano le:*

$$|\xi_i| \leq L \sqrt[k]{|M|}.$$

Diamo ad una delle x, p. es. alla x_i, il valore $+1$, o il valore -1, e a tutte le altre x dei valori non minori di -1 e non maggiori di $+1$. I valori corrispondenti della $|f|$ (che è una funzione continua delle x) avranno un minimo λ_i differente da zero, perchè f è una forma definita. Sia λ la più piccola delle λ_i. Poniamo $L = \frac{1}{\sqrt[k]{\lambda}}$.

Supponiamo che le ξ_i non siano contemporaneamente nulle. Sia m la più grande delle quantità (positive) $|\xi_i|$. Sarà evidentemente:

$$M = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = m^k f\left(\frac{\xi_1}{m}, \frac{\xi_2}{m}, \ldots, \frac{\xi_n}{m}\right).$$

Delle quantità $\frac{\xi_i}{m}$ almeno una è uguale a ± 1, mentre le altre non sono maggiori di 1 in valore assoluto. Per quanto abbiamo detto, avremo perciò:

$$\left|f\left(\frac{\xi_1}{m}, \frac{\xi_2}{m}, \ldots, \frac{\xi_n}{m}\right)\right| \geqq \lambda$$

e quindi

$$|M| \geqq m^k \lambda.$$

Se ne deduce:

$$m \leq \frac{\sqrt[k]{|M|}}{\sqrt[k]{\lambda}} \qquad \text{ed «a fortiori»} \qquad |\xi_i| \leq \frac{1}{\sqrt[k]{\lambda}} \sqrt[k]{|M|}$$

ossia

$$(7) \qquad |\xi_i| \leq L \sqrt[k]{|M|}$$

c. d. d.

Questa disuguaglianza è evidentemente soddisfatta, anche se $\xi_i = 0$.

Osservazione. — Si può supporre che *la quantità L* varii con continuità al variare continuo dei coefficienti di f, come risulta dalla nostra stessa dimostrazione.

Lemma II. — *Se una proiettività lineare reale P, data dalle:*

$$x'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

porta la forma definita $V(x'_1 \ldots . x'_n)$ *in un' altra forma definita* $W(x_1 \ldots . x_n)$, *e se i coefficienti omologhi delle V, W hanno una differenza minore di una costante positiva H in valore assoluto, esiste una costante positiva N, dipendente solo dalla forma V e da H, tale che tutti i coefficienti* a_{ik} *sono in valore assoluto minori di N.*

Infatti si ha

$$V(\Sigma a_{1k} x_k, \Sigma a_{2k} x_k, \ldots, \Sigma a_{nk} x_k) = W(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Indichiamo con k il grado comune delle V, W e con ε_i, η_i i coefficienti di x'^k_i, x^k_i in $V(x')$ e in $W(x)$. Sarà

$$|\eta_i| < |\varepsilon_i| + H.$$

Ma dall' uguaglianza precedente, in cui si ponga $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots = x_n = 0$, $x_i = 1$, si ottiene:

$$|V(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})| = |\eta_i| < |\varepsilon_i| + H.$$

Ne discende tosto per il lemma precedente che esiste una costante L tale che

$$|a_{li}| < L \sqrt[k]{|\varepsilon_i| + H} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

E, se noi indichiamo con N la più grande delle costanti

$$L \sqrt[k]{|\varepsilon_i| + H} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

avremo che

$$|a_{li}| < N, \qquad (l, i = 1, 2, \ldots, n)$$

ciò che dimostra il nostro teorema.

Il teorema vale pure se le forme V, W coincidono, ossia se $H = 0$, ossia se la P trasforma la forma V in sè stessa.

Si può anzi (per l'osservazione fatta a proposito del lemma precedente) supporre che N varii con continuità al variare di H e dei coefficienti delle V, W. Quindi, se noi abbiamo un insieme continuo di forme definite, i cui coefficienti omologhi differiscono tra di loro per meno di δ, e se abbiamo delle proiettività che trasformano alcune di queste forme in altre delle forme medesime, possiamo supporre che per tali proiettività il numero, *sempre finito, N varii con continuità* al variare continuo delle forme corrispondenti, e abbia quindi un *limite superiore finito.*

Dimostreremo ora i seguenti teoremi fondamentali:

Teorema I. — *Condizione necessaria e sufficiente, affinchè un gruppo G di trasformazioni lineari intere omogenee unimodulari* P_s $(s = 1, 2, \ldots)$

$$x'_i = \sum_k a_{ik}^{(s)} x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

non contenga trasformazioni infinitesime, è che, data una costante arbitraria N, esista al più un numero finito di trasformazioni del gruppo, i cui coefficienti sono in modulo minori di N.

Infatti, se il gruppo contiene trasformazioni infinitesime, esistono delle proiettività P_s del gruppo G tali che

$$|a_{ii}^{(s)}| < 1 + \varepsilon \qquad |a_{ik}^{(s)}| < \varepsilon \qquad (i \neq k),$$

dove ε è una costante positiva piccola a piacere. Esistono quindi in G infinite proiettività, i cui coefficienti sono minori in modulo di una qualsiasi costante N positiva e maggiore di 1.

Viceversa esistano in G infinite trasformazioni i cui coefficienti sono minori di N; tra queste, per noti teoremi della teoria degli insiemi, si potranno trovare due trasformazioni, i cui coefficienti omologhi differiscono tra di loro di una quantità piccola a piacere. Presi cioè n punti generici $A_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, si potranno trovare due trasformazioni distinte S, T di G tali che, se $B_i = (y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)})$ e $C_i = (z_1^{(i)}, \ldots, z_n^{(i)})$ sono i punti trasformati di A_i per la S, o per la T, si abbia:

$$|y_h^{(i)} - z_h^{(i)}| < \varepsilon \qquad (\text{per } i, h = 1, 2, \ldots, n),$$

dove ε è una costante piccola a piacere. La trasformazione $S\,T^{-1}$ sia definita dalle: $x'_j = x_j + \sum_h a_{jh}\, x_h$: poichè essa porta C_i in B_i, sarà

$$y_j^{(i)} - z_j^{(i)} = \sum_h a_{jh}\, z_h^{(i)} \qquad (i, j, h = 1, 2, \ldots, n).$$

Tenendo fisso j, e facendo variare i da 1 ad n, otteniamo da questa formola un sistema σ_j di n equazioni lineari omogenee nelle n quantità a_{jh}, che potremo riguardare come incognite. Essendo i punti A_i generici, il determinante D delle $x_h^{(i)}$ è differente da zero: e il determinante D' delle $z_h^{(i)}$, che è uguale a quello perchè la T è unimodulare, non è infinitesimo. Ora, se noi risolviamo il sistema σ_j rispetto alle a_{jh}, noi troviamo a_{jh} dato sotto forma di quoziente di due determinanti, di cui l'uno (dividendo) infinitesimo (perchè $y_j^{(i)} - z_j^{(i)}$ sono quantità infinitesime), e l'altro (divisore) è uguale a D', e non è infinitesimo. Le a_{jh} sono dunque tutte infinitesime: e quindi la trasformazione $S\,T^{-1}$ di G è infinitesima.

Osservazione I. — Se noi interpretiamo le x come coordinate omogenee, il teorema continua ad essere vero.

Si potrebbe abbandonare in tal caso la condizione dell'unimodularità delle trasformazioni del gruppo, dicendo invece che: *il gruppo G è p. d. t. i. soltanto quando, data ad arbitrio una costante N, esiste al più un numero finito di trasformazioni*

$$x'_i = \sum_h a_{ih}\, x_h$$

del nostro gruppo, tali che i quozienti $\frac{a_{ih}}{\sqrt[n]{\Delta}}$ (dove con Δ indico il determinante delle a_{ih}) *sieno tutti inferiori in modulo a N.*

Osservazione II. — Invece di prescrivere che il modulo del determinante Δ dei coefficienti di una qualsiasi trasformazione di G (modulo di questa trasformazione) *sia sempre uguale a* 1, *basterebbe prescrivere che esso fosse compreso tra* $1 - \varepsilon$, $1 + \varepsilon_1$, *dove* $\varepsilon, \varepsilon_1$ *sono costanti soddisfacenti alle* $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon_1 > 0$.

Teorema II. — *Sia dato un gruppo G p. d. t. i. su certe variabili x, ogni trasformazione del quale sia una trasformazione lineare reale intera omogenea. Ed esista un sistema continuo Σ di ∞^m forme definite V delle stesse variabili (i cui coefficienti siano p. es. funzioni di m nuovi parametri $z_1, z_2, \ldots, z_m$) tale che ogni proiettività di G trasformi una forma V di Σ in un' altra forma dello stesso sistema Σ. Il gruppo G, considerato come gruppo di trasformazioni sul dato sistema Σ di forme, è pr. dis. in ogni forma V di Σ, e opera quindi in Σ in modo pr. dis.*

Infatti sia V una forma di Σ, e ne sia i un intorno; per l'osservazione fatta a proposito del secondo lemma, le trasformazioni di G, che portano una qualche forma di i in un'altra forma (distinta o no) di i, hanno i coefficienti minori in valore assoluto di una stessa costante finita, e sono dunque per il precedente teorema in numero finito. Sieno esse le $T_1, T_2, \ldots, T_h$. Se j è un intorno di V, interno a i, una trasformazione di G, che porti una qualche forma di j in un' altra forma di j, sarà una delle forme $T_1, T_2, \ldots, T_h$. Indicheremo con $T_1, T_2, \ldots, T_k$ quelle delle trasformazioni $T_1, T_2, \ldots, T_h$, che portano *almeno* una forma di j in un'altra forma di j, per quanto piccolo sia stato scelto l'intorno j. Potremo allora trovare infinite forme $V_{i1}, V_{i2}, V_{i3}, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ tali che $\lim_{m=\infty} V_{im} = V$, e che, se V'_{im} è la forma trasformata della V_{im} per la T_i, sia ancora $\lim_{m=\infty} V'_{im} = V$. La T_i, che trasforma ogni V_{im} nella V'_{im}, trasformerà dunque la V in sè stessa; è quindi soddisfatta la condizione, affinchè G, considerato come gruppo di trasformazioni del sistema Σ, sia pr. dis. in ogni forma V di Σ, e quindi operi sul sistema Σ in modo pr. dis. (§ 17, pag. 114 e 117).

Si potrebbe del resto dimostrare direttamente che G opera su Σ in modo pr. dis., ossia che in un intorno sufficientemente piccolo di una forma *generica* V di Σ non esistono forme *distinte* equivalenti rispetto a G. Se ciò infatti non fosse, allora, per quanto abbiamo già detto, per ogni forma generica W di Σ dovrebbe esistere almeno una trasformazione non identica T di G, che lascierebbe fissa W, pure non lasciando fissa

tutte le forme di un intorno, per quanto piccolo, di W. E altrettanto avverrebbe per ogni forma V di un intorno i di W. Al variare di V in i, varierà la corrispondente trasformazione T di G. Ma si può dimostrare con metodo analogo a quello usato più sopra che queste trasformazioni T devono essere in numero finito. E noi le potremo indicare con $T_1, T_2, \ldots, T_k$ (k intero positivo *finito*). Una forma V di i sarà trasformata in sè stessa da un certo numero h di trasformazioni scelte tra le $T_1, T_2, \ldots, T_k$: l'intero h potrà variare con V. Noi indicheremo con V_0 una V di i tale, che h abbia il più piccolo valore possibile, e indicheremo con $T_1, T_2, \ldots, T_h$ quelle delle nostre trasformazioni, che lasciano fissa la V_0. Sia α, o un intorno di V_0 tutto interno a i, o quella porzione di un intorno di V_0, che è interna a i. Ogni forma di α sarà trasformata in sè stessa da *almeno* h delle $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Io dico che, se α è abbastanza piccolo, ogni forma di α è trasformata in sè stessa proprio dalle $T_1, \ldots, T_h$ e non da una o più delle altre trasformazioni $T_{h+1}, \ldots, T_k$. Se così non fosse, si potrebbero scegliere in i infinite forme, *aventi* V_0 *come forma limite*, e trasformate in sè da una stessa delle $T_{h+1}, \ldots, T_k$, p. es. dalla T_{h+1}. Questa dovrebbe quindi trasformare in sè stessa anche la V_0, contro l'ipotesi fatta. Se α è abbastanza piccolo, ogni forma di α sarebbe trasformata in sè stessa dalle stesse h trasformazioni scelte tra le $T_1, \ldots, T_k$. E anche questo è assurdo, perchè noi abbiamo già visto che in ogni intorno di una forma V_1 di i esiste sempre una forma, che non è trasformata in sè stessa da *almeno una* di quelle tra le nostre trasformazioni T, che lasciano fissa V_1.

Non è dunque possibile che in ogni intorno di una forma generica di Σ esistano due forme distinte equivalenti rispetto a G.

c. d. d.

Osservazione. — Se le trasformazioni di G sono unimodulari, ossia se il determinante dei coefficienti di una trasformazione qualsiasi di G è uguale a 1, *il teorema precedente continua a essere vero anche nel caso, che non si considerino come distinte forme differenti solo per un fattore costante.*

§ 20. — I teoremi fondamentali per i gruppi di movimenti.

Estenderemo ora i teoremi del § 19 ai gruppi di movimenti: e premetteremo un lemma.

LEMMA I. — *Se* $x'_i = \varphi_i(x_1 \ldots x_n)$ *rappresenta un movimento in una metrica qualunque, esso è infinitesimo allora e allora sol-*

tanto che i valori delle

$$\varphi_i - x_i \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \varepsilon_{ik} \qquad (\varepsilon_{ii} = 1;\ \varepsilon_{ik} = 0 \text{ se } i \neq k)$$

in un punto A generico, ma fisso, sono (si possono rendere) *contemporaneamente infinitesimi.*

Infatti, se la metrica è data, un movimento $x'_i = \varphi_i$ è *determinato* dai valori, che le φ_i e le $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ hanno in un punto generico, ma fisso A. (Questi valori non sono però, in generale, arbitrarii). Ciò è evidente geometricamente. Infatti il dare i valori delle φ_i equivale a dare il punto A' trasformato di A; il dare i valori delle $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ equivale a fissare come il nostro movimento trasforma le direzioni uscenti da A. Io dico che in tal caso il punto B', trasformato di un punto generico B, è determinato senza ambiguità. Sia infatti g la geodetica $A B$; e sia d la direzione di questa geodetica nel punto A. La direzione d', uscente da A', trasformata di d è determinata senza ambiguità; e quindi sarà completamente determinata la geodetica g', trasformata di g. Essa sarà la geodetica, uscente da A', tangente a d'. Quel punto B' di g', tale che il verso $A' B'$ coincida con d', e che la distanza $A' B'$ sia uguale alla distanza $A B$, è il trasformato di B, ed è quindi univocamente determinato. Ma ora il movimento identico è definito dalle $x'_i = x_i$; e per esso i valori $\varphi_i - x_i$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \varepsilon_{ik}$ sono nulli. Affinchè dunque un movimento differisca infinitamente poco dall'identità (sia infinitesimo) è condizione necessaria e sufficiente che le $\varphi_i - x_i$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \varepsilon_{ik}$ siano infinitesime in un punto generico, ma fisso, A.

Osserviamo ancora che il Iacobiano $I(x)$ di M non è che il determinante delle $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$: il quale, nel caso di trasformazioni generali, è l'analogo del determinante dei coefficienti di una trasformazione lineare.

Con metodo analogo a quello seguito per dimostrare il teorema I del § 19, possiamo dimostrare il seguente

Teorema III. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo di movimenti in una data metrica reale, il Iacobiano dei quali sia in valore assoluto compreso tra* $1 - \varepsilon$ *e* $1 + \varepsilon_1$ $(0 < \varepsilon < 1, \varepsilon_1 > 0)$ *non contenga trasformazioni infinitesime, è che, scelta ad arbitrio una costante positiva N, esista nel gruppo al più un numero finito di movimenti, per cui i valori assoluti delle* $\varphi_i - x_i$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \varepsilon_{ik}$ *in un punto generico, ma fisso, A siano minori di N.*

Vale poi il seguente lemma, che si dimostra in modo analogo a quello usato per dimostrare il Lemma II del § 19.

Lemma. — *Se* $x'_i = \varphi_i (x_1 \ldots . x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *è un movimento in una metrica reale, se esso porta un punto B in un punto C, e se le distanze geodetiche di B e C da un terzo punto A sono inferiori a* δ *(dove* δ *è una costante abbastanza piccola), i valori di* $\varphi_i - x_i$ *e di* $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \varepsilon_{ik}$ *nel punto A sono inferiori a una costante N, dipendente soltanto da* δ *e dai coefficienti dell'elemento lineare della metrica.*

Basta osservare che $x'_i = \varphi_i (x_1 \ldots . x_n)$ deve portare B in C, e che la trasformazione lineare intera omogenea sui differenziali $d x$ definita dalle $d x'_i = \sum_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} d x_k$ deve portare l'una nell'altra le forme quadratiche definite positive dei $d x$, a cui si riduce il nostro elemento lineare nei punti B e C e i coefficienti delle quali differiscono di una quantità infinitesima con δ dai coefficienti omologhi della forma, cui si riduce il nostro elemento lineare nel punto A. Se ne deduce tosto il seguente teorema, analogo al teorema II del § 19.

Teorema IV. — *Se G è un gruppo di movimenti in una metrica reale, definita da una forma differenziale quadratica positiva, e se G è p. d. t. i., G è pr. dis. in ogni punto della regione in cui la metrica è reale, ed è quindi pr. dis. in questa regione.*

Se un movimento M di G porta un punto A' in un punto A'', il Iacobiano $I(x)$ di M è uguale alla radice quadrata del rapporto dei valori, che il discriminante Δ dell'elemento lineare ha nei punti A', A''. Prendendo A', A'' in un intorno sufficientemente

piccolo di un punto generico A, si può rendere questo rapporto tanto vicino, quanto si vuole all'unità. Si può quindi trovare una costante positiva $\varepsilon < 1$, tale che $1 - \varepsilon < | I | < 1 + \varepsilon$. Posto questo, il nostro teorema si dimostra in modo perfettamente analogo a quello usato per il teor. II. Le $\varphi_i - x_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \varepsilon_{ik}$ hanno qui l'ufficio, che, nella dimostrazione del teorema II, avevano i coefficienti delle collineazioni di G.

Osservazione. — Il teorema vale anche per le ipermetriche, il cui elemento lineare, considerato come forma algebrica dei differenziali, ammetta qualche invariante non assoluto non nullo (*).

§ 21. — Applicazioni varie dei teoremi precedenti.

Definizione. — L'insieme di 2, di 3, ..., di k forme dello stesso grado di più variabili x si dirà costituire una coppia, una terna, una k^{upla} di forme. Una coppia o terna .... o k^{upla} di forme $V_1, V_2, \ldots, V_k$ si dirà definita positiva (negativa), se per valori reali e non contemporaneamente nulli delle x le forme V non sono mai negative (positive) e non sono mai contemporaneamente nulle.

In tal caso, se $h_1, h_2, \ldots, h_k$ sono costanti positive (negative) non nulle, la forma $\sum_i h_i V_i$ è una forma definita positiva (negativa). La teoria delle k^{uple} definite di forme resta così ricondotta alla teoria delle forme definite. E dal teorema II si trae:

Teorema V. — *Sia dato un gruppo G p. d. t. i. di trasformazioni lineari su certe variabili x. Sia Σ un sistema di coppie, terne, o k^{uple} definite di forme tale che ogni trasformazione di G porti una coppia, o terna o k^{upl} di Σ in un'altra coppia o terna o k^{upla} di Σ. Il gruppo G, considerato come gruppo di trasformazioni di Σ, è pr. dis. in ogni coppia, o terna, o k^{upla} di forme di Σ, e quindi opera su Σ in modo pr. dis. E naturalmente vale anche in*

(*) Nel caso di metriche quadratiche, il discriminante Δ è appunto un tale invariante.

questo caso un' osservazione simile a quella fatta a proposito del teorema II del § 19.

Se V è una forma definita di grado $2h$ nelle x, ogni collineazione reale porta la forma V in un'altra forma definita di grado $2h$ nelle x. Per il teorema II del § 19 si ha:

Teorema VI. — *Un gruppo G di trasformazioni lineari intere omogenee reali su n variabili x, che sia p. d. t. i., opera in modo pr. dis. sul sistema Σ di tutte le forme definite di uno stesso grado $2h$ $(h \geqslant 1)$ delle stesse variabili x, ed è anzi pr. dis. in ogni forma di Σ.*

Osservazione. — Se le trasformazioni di G sono unimodulari questo teorema vale evidentemente, anche se non consideriamo come distinte due forme, che differiscono solo per un fattore costante.

Una forma Hermitiana definita V di certe variabili x_k è portata da ogni proiettività P reale, o complessa sulle x_k in un'altra forma Hermitiana definita delle x_k. Posto $x_k = x'_k + i\,x''_k$ (x', x'' variabili reali) ogni tale forma V equivale a una forma quadratica definita reale delle variabili reali x', x''. Quindi per il teorema II del § 19 si ha:

Teorema VII. — *Un gruppo di trasformazioni lineari intere omogenee, reali o complesse, su certe variabili x, che sia p. d. t. i., opera in modo pr. dis. sul sistema Σ di tutte le forme Hermitiane (*) definite delle stesse variabili, ed è pr. dis. in ogni forma di Σ. E vale anche in questo caso l' osservazione fatta a proposito del teorema VI.*

Valendoci di questa osservazione, si possono enunciare anche così i teoremi VI, VII:

Teoremi VI^bis^ e VII^bis^. — *Consideriamo le forme V definite di grado $2h$ (Hermitiane) di certe variabili x come punti di uno spazio S: consideriamo cioè uno spazio S in cui siano coordinate*

(*) Potremmo anche considerare le forme algebriche di grado qualunque delle x, x^0, che hanno valori reali per qualsiasi valore delle x; le forme Hermitiane sono tra queste le forme di grado *due*.

omogenee i coefficienti delle V (la parte reale e la parte immaginaria dei coefficienti delle V). E sia R quella regione di S, i cui punti sono immagine di forme definite. Un gruppo G di trasformazioni reali (complesse) lineari intere omogenee unimodulari sulle x, che sia p. d. t. i., dà origine a un gruppo pr. dis. in ogni punto di R, e quindi anche in R.

Abbiamo dunque imparato a costruire, con un metodo assai importante, una regione R di uno spazio S, in cui un gruppo proiettivo qualunque p. d. t. i. è pr. dis.

Il teorema IV si può anche enunciare così:

Teorema VIII. — *Se un gruppo G p. d. t. i. si può considerare come un gruppo di movimenti in una metrica reale in una regione R di uno spazio S, esso è pr. dis. in ogni punto di R, e in R.*

Questo teorema è assai importante, e da esso si possono dedurre moltissimi teoremi particolari. P. es. si vede subito che il teorema VI (almeno nel caso di $h = 1$) e il teorema VII ne sono immediata conseguenza. Infatti, come abbiamo dimostrato al § 7 (pag. 37-41), un gruppo proiettivo G si puó sempre considerare come gruppo di movimenti in una metrica reale nella regione R dello spazio S, che figura nell'enunciato dei teoremi VI^bis e VII^bis.

Ma dal teorema precedente si possono trarre altre *conseguenze assai importanti relativamente ai gruppi di trasformazioni proiettive unimodulari, che trasformano in sè stessa una data forma* $V(x)$, dove le x si considerano come coordinate omogenee dello spazio ambiente S; un tale gruppo, per i risultati del § 7, si può in moltissimi casi riguardare come gruppo di movimenti di una metrica reale *in una regione* R dello spazio ambiente S. Noi abbiamo visto cioè (pag. 36) che possiamo in molteplici modi costruire delle forme $L(z, x)$, dipendenti dalle x, e da un sistema cogrediente di variabili z, le quali siano trasformate in sè stesse da ogni collineazione, che trasformi in sè stessa la V (cfr. per le notazioni il § 7). *Sia R quella regione di S* (se pure una tal regione esiste), *i cui punti* (x) *sono tali che l'iperpiano* $\Sigma \frac{\partial V}{\partial x_i} z_i = 0$

non abbia punti reali comuni con almeno una delle ipersuperficie $L(z, x) = 0$. Per i risultati del § 7 e per il teorema VIII potremo concluderne:

Teorema IX. — *Un gruppo di trasformazioni proiettive unimodulari p. d. t. i., che trasformi in sè stessa una forma V, è pr. dis. in ogni punto della regione R dello spazio ambiente S* (ammesso che una tal regione esista), *e nella stessa regione R.*

Questo teorema, che abbiamo trovato come conseguenza del teorema IV, si potrebbe anche dedurre dal teorema II.

Ne traggiamo in particolare:

1. *Un gruppo p. d. t. i. di trasformazioni proiettive reali* (*complesse*) *unimodulari, che trasformi in sè stessa una forma algebrica* (*Hermitiana*) *definita è pr. dis. in tutti i punti dello spazio, ed opera in modo pr. dis. nello spazio stesso.*

2. *Un gruppo proiettivo reale p. d. t. i., che trasformi in sè stessa una forma Q quadratica del tipo* $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2$, *è pr. dis. in tutti i punti della regione dello spazio ambiente, che è interna alla quadrica* $Q = 0$, *e in questa stessa regione* (§ 9, pag. 50).

3. *Un gruppo G proiettivo reale o complesso p. d. t. i., che trasformi in sè stessa una forma Hermitiana del tipo* $x_1 x_1^0 + \ldots + x_{n-1} x_{n-1}^0 - x_n x_n^0$ *è pr. dis. in una regione R di uno spazio S così definito* (cfr. § 8, pag. 47). *Posto* $\frac{x_k}{x_n} = \xi_k = u_k + i v_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, *S è quello spazio, in cui sono coordinate* (non omogenee) *le* u_k, v_k, *R è quella regione di S, i cui punti soddisfano alla:* $\sum_{k=1}^{n} (u_k^2 + v_k^2) < 1$. *Il gruppo G è anche pr. dis. in ogni punto di R.*

Ricordando poi che, se *G* è un gruppo misto, i cui gruppi parziali sono gruppi di movimenti, allora *G* è pure un gruppo di movimenti (in una metrica mista), otteniamo:

4. *Se G è un gruppo misto, i cui gruppi parziali si possono considerare come gruppi di movimenti, e se G è p. d. t. i., esso è pr. dis. in tutti i punti di quella regione R dello spazio ambiente - e quindi in quella stessa regione R -, tale che i gruppi parziali siano gruppi di movimenti per una metrica reale nelle proiezioni di R sui singoli spazii parziali* (cfr. § 16).

Così p. es., se $x_1^{(i)}\, x_2^{(i)} \ldots . x_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots . k)$ sono coordinate omogenee nell' i^{esimo} spazio parziale, e se l' i^{esimo} gruppo parziale di G trasforma in sè stessa la forma

$$x_1^{(i)2} + x_2^{(i)2} + \ldots . + x_{n-1}^{(i)2} - x_n^{(i)2},$$

il gruppo G è pr. dis. in quella regione R dello spazio S, tale che la proiezione di un punto di R sullo i^{esimo} spazio parziale soddisfi alle:

$$x_1^{(i)2} + \ldots . + x_{n-1}^{(i)2} - x_n^{(i)2} < 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots . k).$$

Risultati analoghi si ottengono nel caso che i singoli gruppi parziali lasciassero fisse forme Hermitiane, o forme algebriche di grado superiore al secondo, ecc. ecc.

Da questi teoremi risulta ben chiara l'importanza, per la teoria dei gruppi, dei risultati ottenuti al § 7.

Teorema X. — *Sia G un gruppo p. d. t. i. di collineazioni reali in uno spazio S, in cui $x_1, x_2, \ldots . x_n$ sono variabili omogenee; se le collineazioni di G trasformano in sè una forma quadratica $V = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - \ldots . - x_n^2$, allora G opera in modo pr. dis. sui punti complessi della quadrica $V = 0$, che non giacciono su una retta reale di questa quadrica.*

Sia infatti A un punto complesso della quadrica $V = 0$, e sia A_0 il punto immaginario coniugato: la retta *reale* $A\, A_0$ non giaccia sulla nostra quadrica. Questa retta avrà nello spazio S uno spazio polare *reale* S_{n-3} a $n - 3$ dimensioni. Consideriamo i due coni tangenti alla $V = 0$, che hanno rispettivamente per nucleo la retta $A\, A_0$, e lo spazio S_{n-3}. Essi sono a generatrici immaginarie e saranno rispettivamente definiti da equazioni del tipo:

$$f_1 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots . + y_{n-2}^2 = 0; \qquad f_2 = y_{n-1}^2 + y_n^2 = 0$$

dove le y sono combinazioni lineari indipendenti delle x, tali che sia $V = k\, f_1 + h\, f_2$, dove h, k sono costanti reali, di segno opposto. Una proiettività reale U, che trasformi in sè stessa la forma V e il punto A, sarà unimodulare e trasformerà in sè

stessi i coni $f_1 = 0, f_2 = 0$: essa dovrà moltiplicare quindi f_1, f_2 per fattori costanti. Ma poichè la forma $V = k f_1 + h f_2$ è trasformata in sè stessa, questi fattori devono essere uguali all'unità; e perciò la proiettività in discorso sarà unimodulare e trasformerà in sè stessa ciascuna delle due forme f_1, f_2: le quali sono una coppia *definita* (cfr. pag. 127) di forme. Una proiettività reale T, trasformante la V in sè stessa, che porti il punto A in un altro punto complesso B della $V = 0$, porterà la coppia di forme corrispondente ad A in un'altra coppia corrispondente a B, la quale è determinata senza ambiguità, appena sia dato il punto B (*). Il gruppo opera in modo pr. dis. (teorema V del § 21) sul sistema Σ formato dalle coppie di forme, corrispondenti ai varii punti complessi della $V = 0$. Essa opera quindi pure in modo pr. dis. sui punti complessi della $V = 0$, i quali sono in corrispondenza biunivoca continua con le coppie di forme del sistema Σ (cfr. § 18, pag. 118).

c. d. d.

Dedurremo ora alcune conseguenze. Proiettiamo stereograficamente la quadrica $V = 0$ da un suo punto su uno spazio lineare S_{n-2} a $n - 2$ dimensioni, immerso in S. Con metodi analoghi a quelli, di cui ci siamo serviti nella Parte prima per studiare la rappresentazione conforme degli spazii a curvatura costante sugli spazii euclidei, si può dimostrare che al gruppo di trasformazioni, indotto sui punti della nostra quadrica dalle proiettività in S, che trasformano in sè stessa la forma V, corrisponde, su S_{n-2}, un gruppo di trasformazioni conformi in una metrica euclidea *indefinita* (vale a dire in una metrica *non reale*, il cui elemento lineare è una forma, non definita, del tipo $d\,\xi_1^2 + d\,\xi_2^2 + \dots + d\,\xi_{n-3}^2 - d\,\xi_{n-2}^2$).

Dal teorema X si può quindi trarre:

(*) Basti ricordare che ogni altra trasformazione T', che lasci invariata la forma V, e porti A in B è prodotto di una trasformazione, che lascia invariati il punto A e la forma V, per la trasformazione T.

Teorema XI. — *Un gruppo p. d. t. i. di trasformazioni confor-ni in una tale metrica euclidea indefinita opera in modo pr. dis. ui punti complessi dello spazio.*

Il teorema XI ha una speciale importanza per lo studio dei gruppi riproduttori delle funzioni ipermodulari.

Sia ora G un gruppo p. d. t. i., le cui trasformazioni sieno reali, lineari, intere, omogenee nelle x, e trasformino in sè stessa la forma $V = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0$. Consideriamo i punti reali e complessi dello spazio S_{n-1}, in cui le x sono coordinate omogenee; posto $\frac{x_t}{x_n} = \xi_t + i\,\eta_t\,(t = 1, 2, \ldots, n-1)$, sia Σ lo spazio, in cui le ξ, η sono coordinate (non omogenee). Ogni punto reale di Σ è immagine di un punto, reale o complesso, di S. Per ogni punto complesso A di S passa una sola retta *reale:* la retta, che congiunge A col punto immaginario coniugato A_0. Noi indicheremo con R' quella regione di Σ, i cui punti B sono immagine di tali punti complessi A di S, che la retta reale $A\,A_0$ tagli la $V = 0$ in punti reali, e quindi *attraversi* la regione R di S, interna alla $V = 0$. Ora è facile riconoscere che a ogni tale punto A di S si può sempre far corrispondere un punto reale C di R, posto sulla retta $A\,A_0$ in guisa che, se una trasformazione reale lineare intera omogenea sulle x trasforma la forma V in sè stessa, e porta A in un altro punto A', essa porti anche il punto C corrispondente ad A nel punto C' corrispondente ad A'. Infatti noi potremo fissare il fattore di proporzionalità per le coordinate omogenee x di A in guisa che $V(x) = 1$. Posto $x_j = \lambda_j + i\,\mu_j\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ le λ_j, μ_j saranno determinate a meno del segno, e sarà $\Sigma\,\lambda_j\,\mu_j = 0$. I due punti reali di S, le cui coordinate omogenee sono proporzionali rispettivamente alle λ o alle μ, giacciono sulla retta r, e saranno coniugati uno dell'altro rispetto alla $V = 0$: uno di essi apparterrà ad R, l'altro sarà esterno a R. Quello di essi, che è interno a R, è evidentemente un punto C, che soddisfa alle condizioni volute. Ne segue che, se due punti B di R' (o, ciò che è lo stesso,

i due punti A corrispondenti in S_{n-1}) sono equivalenti rispetto a G, altrettanto avverrà dei punti C, che loro corrispondono in R. E, poichè G è pr. dis. in R, noi potremo anche dire:

Teorema XII. — ***Se il gruppo G p. d. t. i. è un gruppo di trasformazioni lineari intere omogenee reali, che trasforma in sè la forma*** $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2$, ***esso opera in modo pr. dis. sui punti A complessi di S, che sono posti su una retta reale r attraversante la regione R. Esso è cioè pr. dis. nella regione R' di uno spazio*** Σ', ***così definito:*** Σ' ***è uno spazio, i cui punti reali sono in corrispondenza biunivoca continua coi punti complessi di*** S_{n-1}; ***R' è quella regione di*** Σ', ***luogo dei punti B, a cui corrispondono in*** S_{n-1}, ***punti posti su una retta reale di*** S_{n-1}, ***che attraversa R.***

Questo teorema completa nel modo più semplice il secondo corollario del teorema IX (pag. 130).

Osservazione. — Un teorema completamente analogo vale anche per i gruppi reali che trasformano in sè stessa una forma V di grado superiore al secondo. In molti casi noi sappiamo che un tale gruppo è pr. dis. in una certa regione R dello spazio ambiente S_{n-1}; il teorema precedente si può estendere a quei punti complessi A di S_{n-1}, che sono posti su una retta reale intersecante R, dimostrando che per ogni tale punto A si possono trovare uno o più punti reali C appartenenti a R, tali che ogni proiettività reale, che trasforma in sè stessa la V, e porta il punto A in un punto A', porti anche il punto o i punti reali C, corrispondenti ad A, nel punto o nei punti C' corrispondenti ad A'.

Nei §§ 19, 20, 21 abbiamo dato dei teoremi generali, che per ampie classi di gruppi p. d. t. i., o ci permettono di affermarne senz'altro la propria discontinuità, o ci danno il mezzo per costruire un gruppo isomorfo pr. dis. Non parrebbe però che noi fossimo riusciti a risolvere in generale, neanche per i gruppi lineari, ***la questione di riconoscere se un dato gruppo p. d. t. i. è, o non è pr. dis.*** Ma nel § 27 vedremo che ***i teoremi VI e VII permettono di trovare un metodo generale per affrontare la nostra questione per i gruppi di trasformazioni lineari più generali.***

§ 22. — Gruppi aritmetici, gruppi fuchsiani, fuchsiani misti, kleiniani, iperfuchsiani, iperfuchsiani misti.

L'aritmetica ci offre molti esempi di gruppi proiettivi discontinui p. d. t. i. P. es. consideriamo un gruppo G di collineazioni P a coefficienti interi razionali su certe variabili $x_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e a determinante ± 1. Esso è discontinuo, e chiaramente è p. d. t. i. Altrettanto avviene se i coefficienti delle trasformazioni del gruppo, anzichè interi razionali, sono interi di Gauss, vale a dire sono numeri della forma $a + i\,b$, dove a, b sono interi razionali, $i = \sqrt{-1}$. Se invece le trasformazioni del gruppo sono numeri interi algebrici in un dato campo di razionalità K_0 algebrico, allora non si può più escludere che il gruppo G sia privo di trasformazioni infinitesime, perchè in certi campi algebrici K possono benissimo esistere infiniti numeri interi, inferiori in modulo a una stessa costante finita (*). Ma però da ogni tale gruppo G si può dedurre un gruppo Γ p. d. t. i., come ora dimostreremo.

Supponiamo p. es. che il dato campo K_0 sia reale, insieme ai campi algebrici coniugati $K_1, K_2, \ldots, K_{p-1}$. Consideriamo insieme a una trasformazione P_0 di G $p-1$ nuove trasformazioni lineari $P_1, P_2, \ldots P_{p-1}$, operanti rispettivamente su $p-1$ sistemi di nuove variabili $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots x_i^{(p-1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, e i cui coefficienti sono numeri interi rispettivamente nei campi $K_1, K_2, \ldots, K_{p-1}$ e precisamente sono gli interi coniugati dei coefficienti omologhi della P_0. Indicheremo con Π il prodotto delle P, ossia l'insieme delle P_k considerato come un'unica trasformazione sulle $p\,n$ variabili $x_i^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Le trasformazioni Π generano un gruppo misto Γ, isomorfo oloedricamente al gruppo G, il quale è evidentemente p. d. t. i., perchè un numero intero algebrico non può essere infinitesimo insieme

---

(*) Cfr. DIRICHLET-DEDEKIND, *Teoria dei numeri*. Traduzione italiana di A. FAIFOFER. Venezia, 1881. (Cap. 11, pag. 424 e seg.).

a tutti gli interi coniugati. Se poi il gruppo G è il più ampio gruppo a coefficienti interi nel campo assoluto di razionalità, o nel campo K_0, che trasforma in sè stessa una forma V_0 a coefficienti intieri nello stesso campo di razionalità, allora G si chiama *gruppo aritmetico riproduttore* (nel dato campo di razionalità) *della forma* V_0.

Valendoci dei teoremi del § 21, pag. 130-131, troviamo p. es.:

Il gruppo aritmetico riproduttore di una forma quadratica V_0 a coefficienti interi nel campo assoluto di razionalità è pr. dis. in tutto lo spazio, se la forma V_0 è definita, ed è pr. dis. nella regione R, formata dai punti interni alla quadrica $V_0 = 0$, se, con un cambiamento lineare reale di variabili, la forma V_0 si può ridurre al tipo $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2$. Se il campo di razionalità considerato non è il campo assoluto di razionalità, ma è un qualsiasi campo algebrico K_0, reale insieme ai campi coniugati, allora G non è più in generale pr. dis. Ma è invece pr. dis. il gruppo misto Γ, individuato da G. E precisamente, secondo che V_0 è definita o è del tipo $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2$, il gruppo Γ è pr. dis. in tutto lo spazio, oppure in quella regione R, i cui punti hanno per proiezione sui singoli spazii parziali dei punti interni rispettivamente alle quadriche $V_0 = 0$, $V_1 = 0$, ... $V_{p-1} = 0$.

Con V_1, V_2, ..., V_{p-1} ho indicato forme quadratiche, i cui coefficienti sono nei campi K_1, K_2, ..., K_{p-1} i numeri interi coniugati ai coefficienti di V_0.

Teoremi analoghi valgono per le forme Hermitiane.

Un gruppo *iperfuchsiano* (*fratto*) (§ 4, pag. 16, e § 8, pag. 42) su certe variabili complesse $x_k = u_k + i v_k$ è un gruppo di movimenti in una metrica Hermitiana, definita da una forma differenziale quadratica delle variabili u_k, v_k. Così un gruppo *iperfuchsiano misto* è un gruppo di movimenti in una metrica mista, le cui metriche parziali sono Hermitiane. Perciò:

Un gruppo iperfuchsiano o iperfuchsiano misto p. d. t. i. è pr. dis. nella regione, in cui la metrica corrispondente è reale.

Sia data una forma V Hermitiana *indefinita* (*) di due variabili x_1, x_2. Uguagliando a zero una tale forma, noi otteniamo chiaramente l'equazione di un cerchio o di una retta reale C del piano complesso della variabile $x = \frac{x_2}{x_1}$. Un gruppo G (iperfuchsiano intero) di trasformazioni lineari intere omogenee, che trasformino la V in sè stessa, dà origine a un gruppo Γ (iperfuchsiano fratto) di trasformazioni sulla variabile x, trasformante in sè stesso tanto il cerchio C, quanto ognuna delle due regioni, in cui C divide π.

Se** Γ **è p. d. t. i., esso si dirà, con Poincaré, ***un gruppo fuchsiano; il cerchio*** o ***retta** C* si dirà ***cerchio o retta limite*** di Γ.

I gruppi fuchsiani furono il punto di partenza per la costruzione della teoria delle funzioni automorfe; tra i gruppi p. d. t. i. essi sono quelli, la cui teoria è giunta a più completo sviluppo.

Gruppo fuchsiano si chiama dunque ogni gruppo** Γ **di trasformazioni lineari fratte su una variabile complessa** x**, che sia p. d. t. i. e che trasformi in sè stessi tanto un cerchio reale** C **del piano complesso** π **della variabile** x**, quanto ognuna delle due regioni, in cui** C **divide** π**.

È infatti assai facile riconoscere che ogni gruppo siffatto si può ottenere col procedimento precedente da un gruppo iperfuchsiano intero, che trasformi in sè stessa una forma Hermitiana V indefinita.

Con una trasformazione lineare fratta sulla x, noi possiamo trasformare il cerchio o retta limite C nell'asse reale del piano π. Il gruppo Γ sarà trasformato in un gruppo fuchsiano simile, che indicheremo ancora con Γ, il quale trasformerà in sè stessi tanto questo asse, quanto ognuna delle due regioni, in cui questo asse

(*) Diciamo forma Hermitiana indefinita una forma Hermitiana, che non sia nè degenere, nè definita. Una tale forma di due variabili indipendenti si può con una trasformazione lineare intera omogenea su queste variabili portare in una forma equivalente $h(x_1 x_2^0 - x_2 x_1^0)$ ($h =$ cost. reale).

divide π. Le trasformazioni del nuovo gruppo Γ saranno perciò trasformazioni del tipo: $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, dove le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ si possono supporre costanti *reali* soddisfacenti alla $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Per i risultati del § 15, noi possiamo considerare un gruppo fuchsiano, o come gruppo di movimenti per una metrica di Bólyai in ciascuna delle due regioni R', R'' in cui la linea (retta o cerchio) limite divide il piano π, oppure (ciò che essenzialmente è la stessa cosa) come un gruppo di proiettività reali trasformanti in sè stessa una conica reale, i punti interni alla quale corrispondono biunivocamente ai punti di R', o di R''.

Per i teoremi del § 20, pag. 126, e del § 21, pag. 130, abbiamo dunque:

Un gruppo fuchsiano G su una variabile x, (che è per definizione p. d. t. i.) è pr. dis. in ciascuna delle due regioni, in cui la linea limite divide il piano π della variabile complessa x.

Unici punti eccezionali (in un intorno dei quali *può darsi* che G non sia pr. dis.) sono i punti della linea limite.

Un gruppo G iperfuchsiano misto e p. d. t. i., ogni gruppo parziale del quale è un gruppo G_h lineare fratto su *una sola* variabile $x_h = y_h + i z_h$ $(h = 1, 2, \ldots, k)$, si dice gruppo *fuchsiano misto*. Lo spazio totale è lo spazio, in cui tutte le y_h, z_h sono coordinate (non omogenee): gli spazii parziali sono i piani π_h delle variabili complesse x_h. Indicheremo con l_h la linea limite di G_h su π_h. Avremo allora: *Un gruppo fuchsiano misto, che sia p. d. t. i., è pr. dis. in tutto lo spazio totale: punti eccezionali possono essere soltanto quelli, la cui proiezione su almeno uno degli spazii parziali π_h cadono proprio sulla linea limite l_h.*

Un gruppo fuchsiano misto, per cui $k = 2$, si dice anche *iperabeliano*. Mostreremo ora quale intima connessione passa tra i gruppi iperabeliani. e i gruppi del teorema X (§ 21, pag. 131), ove si ponga $n = 4$. Sia data una quadrica $V = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$

nello spazio a 3 dimensioni. Su questa quadrica giacciono due sistemi di generatrici

$$\frac{x_1 - x_3}{x_4 + x_2} = \frac{x_4 - x_2}{x_1 + x_3} = \xi \qquad \frac{x_1 - x_3}{x_4 - x_2} = \frac{x_4 + x_2}{x_1 + x_3} = \eta$$

dove le ξ, η sono parametri costanti lungo le generatrici dell'uno o dell'altro sistema. Un punto A della $V = 0$ si può determinare, dando i parametri ξ, η delle due generatrici che passano per A. Se G è un gruppo proiettivo reale trasformante la V in sè stessa, noi potremo (sostituendo eventualmente a G un suo sottogruppo di indice 2) supporre che G trasformi in sè stesso ciascuno dei due sistemi di generatrici. Ogni trasformazione di G darà origine a una trasformazione del tipo:

$$\xi' = \frac{\alpha \xi + \beta}{\gamma \xi + \delta} \qquad \eta' = \frac{\lambda \eta + \mu}{\nu \eta + \rho}$$

sulle due variabili ξ, η, dove le α, β, γ, δ, λ, μ, ν, ρ possono evidentemente supporsi reali. Queste trasformazioni sulle ξ, η generano evidentemente un gruppo iperabeliano Γ, isomorfo a G. E considerare come G opera sui punti complessi della $V = 0$, è equivalente a considerare come Γ trasforma i valori complessi delle ξ, η. *Il teorema precedente relativo ai gruppi fuchsiani misti, è, se si suppone $k = 2$, equivalente al teorema X, ove si supponga $n = 4$.*

Si dice gruppo ***kleiniano*** un gruppo qualunque, p. d. t. i., di trasformazioni del tipo

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

dove le α, β, γ, δ sono costanti qualunque reali o complesse, quando esso non trasforma in sè una retta o un cerchio del piano π della variabile complessa in x. Non sempre un tale gruppo è pr. dis. pure essendo p. d. t. i. *Un gruppo kleiniano G p. d. t. i. è però pr. dis. sulle terne di punti di π* (§ 18, pag. 118).

Un gruppo kleiniano, per i risultati del § 14, definisce, o,

una metrica regolare nel punto individuato dalle

$$y_i = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad y_{m+k} = \alpha_{m+k} \ (k = 1, 2, \ldots, n - m)$$

nel senso più sopra definito.

Lemma. — *Se A è un punto reale, in cui M è regolare, e se G è un gruppo p. d. t. i. di movimenti in M, allora il gruppo di punti formato da un punto generico B, e dai punti equivalenti a B per G, non può avere il punto A come punto limite.*

Se infatti A fosse punto limite di punti equivalenti a B per G, il gruppo G non sarebbe pr. dis. in A (§ 17, pag. 114-115).

Teorema. — *Un gruppo G p. d. t. i. di movimenti reali in una metrica M regolare in ogni punto reale è composto di un numero finito di trasformazioni.*

Noi sappiamo già dal § 20, pag. 126, teor. IV, che G è pr. dis. Dal teorema precedente noi sappiamo che un punto B reale, e i punti equivalenti formano un gruppo di punti, che non può avere punti limiti. Dunque un punto generico B può avere soltanto un numero *finito* di punti equivalenti. Se G contenesse infiniti movimenti, ogni punto B dovrebbe essere lasciato fisso da infiniti movimenti $x'_i = \varphi_{ki}(x_1 \ldots . x_n)$. Con metodo analogo a quello usato per dimostrare il lemma di pag. 126 si vedrebbe, per il teorema III di pag. 126, che G non sarebbe p. d. t. i.

Dal precedente lemma risulta pure che, se G è un gruppo di movimenti in una metrica di Euclide o di Bólyai e se esso non contiene trasformazioni infinitesime, allora un punto A di questa metrica e i punti equivalenti formano un gruppo di punti, il cui gruppo derivato non contiene *alcun punto a distanza finita.*

Una metrica di Riemann è definita dall'elemento lineare

$$d s^2 = d x_1^2 + \ldots . + d x_n^2,$$

dove le x sono legate dalla relazione: $x_1^2 + \ldots . + x_n^2 = 1$.

Nessuna delle x può avere valori infiniti; e quindi la metrica è regolare in ogni punto. Quindi:

Un gruppo di movimenti in una metrica di Riemann, che sia p. d. t. i., è un gruppo discontinuo finito.

È ben noto viceversa che un gruppo discontinuo finito di collineazioni reali su n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ si può considerare (*) come gruppo di movimenti in uno spazio di Riemann. Infatti esso deve trasformare in sè la forma quadratica definita, che si ottiene aggiungendo alla forma $x_1^2 + \dots + x_n^2$ le forme trasformate.

In modo analogo si possono trovare risultati affatto simili per le metriche Hermitiane.

Un gruppo p. d. t. i. di collineazioni complesse che trasformi in sè una forma Hermitiana positiva (o, ciò ch'è lo stesso, che sia un gruppo di movimenti in una metrica Hermitiana ellittica) *è un gruppo discontinuo finito.*

E anche di questo teorema è vero il reciproco.

Questi risultati dimostrano che nello studio dei gruppi infiniti p. d. t. i. si debbono trascurare i gruppi, che sono gruppi di movimenti in una metrica ellittica Hermitiana o a curvatura costante.

Capitolo Sesto. — **I campi fondamentali.**

§ 24. — Prime definizioni.

Dato un gruppo G qualunque di trasformazioni in uno spazio S, resterà per ogni punto A individuato un sistema Σ di punti equivalenti ad A rispetto al gruppo G. I punti equivalenti a un punto di Σ sono tutti e soli i punti di Σ: basta perciò dare un punto di Σ, perchè tutto il sistema sia individuato senza ambiguità. E, se escludiamo il caso che due punti qualunque di S siano equivalenti (nel qual caso l'insieme Σ coincide con lo spazio S), lo spazio S conterrà un numero finito o infinito di sistemi Σ, ognuno dei quali è composto di punti tutti equivalenti tra loro. In ognuno di questi sistemi Σ scegliamo un punto

(*) Bagnera, Rend. del Circolo Matem. di Palermo. Tomo 15, pag. 165 e seg.

con una legge qualsivoglia. Otterremo così un sistema P di punti, composto di un numero finito o infinito di punti, tale che un punto qualunque di P appartiene a uno e a un solo sistema Σ, e ogni sistema Σ contiene un punto e un punto solo del sistema P.

In altre parole: *Ogni punto di S è equivalente a un punto e a un punto soltanto di P.*

E perciò: *Due punti distinti di P non sono mai equivalenti, rispetto a G.*

Se il gruppo G trasforma in sè stessa una regione R di S, noi possiamo anche limitarci a studiare i punti di R, costruendo un insieme fondamentale P in R: un insieme cioè, che goda della seguente proprietà:

Ogni punto di R è equivalente a uno e un solo punto di P. (Il caso precedente è quello, in cui R coincide con lo spazio ambiente S). *Ogni sistema o insieme di punti, che goda di questa proprietà, si dice fondamentale in R.*

Siano P, P' due insiemi fondamentali: potrà darsi che questi due insiemi abbiano dei punti comuni. Sia p l'insieme di questi punti. Ogni punto dell'insieme $P - p$ (*) sarà equivalente a uno e un solo punto dell'insieme $P' - p$. Viceversa, se P è un insieme fondamentale, se q è un insieme di punti tutti contenuti in P, se infine q' è un insieme ogni punto del quale è equivalente a uno e un solo punto di q, allora l'insieme $P' = P - q + q'$ (**) è ancora un *insieme fondamentale.*

Queste operazioni, che permettono di ottenere da un dato insieme fondamentale nuovi insiemi fondamentali, si dicono *cambiamenti leciti* (erlaubte Abänderungen).

Sia P un insieme fondamentale di un gruppo G. Applichiamo ad esso tutte le trasformazioni di G. Esso si trasformerà in nuovi

---

(*) Cioè ogni punto di P, che non appartiene a p.

(**) P' è l'insieme dei punti, che appartengono o a q', o a $P - q$.

insiemi P', ciascuno dei quali è evidentemente un ***insieme fondamentale.***

Da uno di questi insiemi P' si può passare a ogni altro mediante una opportuna trasformazione di G: ciò che si suole esprimere, dicendo che G opera in modo ***transitivo*** sugli insiemi P, P'.

Ogni punto A di R appartiene o a P, o ad uno almeno degli insiemi P'. Se infatti B è il punto di P equivalente ad A, quella trasformazione di G, che porta B in A, porta P in un insieme P', contenente il punto A.

Una trasformazione di G, che trasformi in sè stesso l'insieme P, (o un insieme P') deve portare ogni punto di questo insieme in un punto equivalente dello stesso insieme, e quindi ***trasformerà in sè stesso ogni punto di P (dell'insieme P' considerato).***

Noi ammetteremo che nessuna trasformazione non identica di G possa trasformare in sè stesso ogni punto di P. Ne verrà, per il precedente teorema, che ogni trasformazione non identica di G porta P in un insieme P' distinto da P.

Una trasformazione non identica U di G non potrà trasformare in sè stesso un insieme P', perchè altrimenti (se V è la trasformazione che porta P in P') la trasformazione $V^{-1} U V$ (non identica) di G trasformerebbe l'insieme P in sè stesso.

Due trasformazioni U, V distinte di G portano ogni insieme P' in due insiemi P'', P''' distinti, perchè, se così non fosse, la trasformazione non identica $U V^{-1}$ di G porterebbe P'' in sè stesso.

Ciò si esprime dicendo che il gruppo G opera in modo ***semplicemente transitivo*** sugli insiemi P, P'.

Un punto A comune a due degli insiemi P, P' deve essere lasciato fisso da quella trasformazione non identica di G, che trasforma l'uno nell'altro i due insiemi.

La teoria degli insiemi fondamentali ha caratteri ben distinti, secondo che si tratta di gruppi pr. dis. nella regione R che si considera, oppure di gruppi, che in R non sono pr. dis.

Supponiamo che ***G non sia pr. dis. in qualsiasi regione R;***

interna a R: supponiamo cioè che in ogni regione R', interna a R, esista sempre almeno una coppia di punti distinti, equivalenti rispetto a G. Se P è un insieme fondamentale, uno solo di questi punti può appartenere a P. E quindi in ogni regione R' di R esiste *almeno* un punto non appartenente a P. Cioè: *i punti di R, che non appartengono a un insieme fondamentale P,* scelto in modo arbitrario, *formano un insieme di punti denso in tutto R.*

Se indichiamo con Q l'insieme dei punti di R, che non appartengono a P, e con Q_1 l'insieme che è somma dell'insieme Q e dell'insieme formato dai punti comuni a R, e all'insieme derivato di Q, potremo dire che *l'insieme Q_1 coincide con la regione totale R.* E notiamo che se *R è perfetta,* ossia se i punti dell'insieme derivato di R (i punti del contorno di R) si considerano come appartenenti a R, allora Q_1 è senz'altro l'insieme somma dell'insieme Q, e dell'insieme derivato di Q. Del resto in questo caso Q_1 coincide con l'insieme derivato di Q.

Se invece G è pr. dis. nella regione R, allora in un intorno α di un punto generico A non esistono punti distinti equivalenti. Noi possiamo dunque considerare un insieme fondamentale P, a cui appartengano *tutti* i punti di α; cosicchè, se α' è una regione, tutta interna ad α, *nessun* punto di Q_1 può appartenere ad α. Indicheremo con P_1 l'insieme somma di P e dell'insieme, i cui punti appartengono contemporaneamente a R e all'insieme derivato di P; e conserveremo il significato precedente di Q, Q_1. Indicheremo con p l'insieme comune a P_1, Q_1. Noi completeremo nel § 25 l'osservazione precedente, dimostrando, almeno per i casi più importanti per noi, che si può sempre trovare un insieme fondamentale P in guisa che:

I punti di p riempiono un numero finito, o un'infinità numerabile di ipersuperficie, o di pezzi di ipersuperficie, le quali dividono R in due parti, R_1, R_2, connesse o no. I punti appartenenti a R_1, non posti su p, o, come diremo, i punti interni a R_1 appartengono tutti a P. I punti interni a R_2 appartengono tutti a Q.

Se A è un punto di R_1 (di R_2), non posto su p, allora esiste un intorno di A, i cui punti appartengono tutti a R_1, o a R_2.

I punti che appartengono a R_1, o a p riempiono così tutta una regione di G, che si chiama un *campo fondamentale* per il gruppo G. L'insieme p ed eventualmente qualche pezzo del contorno di R formano il *contorno di questo campo.*

Questo risultato si può rendere intuitivo con le seguenti considerazioni, le quali però non hanno alcuna pretesa di rigore. Se G è pr. dis. in R, un punto A e i suoi punti trasformati avranno punti limiti soltanto sul contorno di R. Consideriamo un intorno α_0 di un punto A di R, scelto in modo generico, e gli intorni $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ equivalenti. Se α_0 è abbastanza piccolo, due qualunque di questi intorni non hanno punti comuni. Facendo ingrandire α_0, ingrandiranno gli intorni $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ È abbastanza intuitivo che si potranno far ingrandire questi intorni in guisa da riempire *semplicemente* la R. Questi intorni, ingrandendo, diventeranno delle regioni $K_0, K_1 \ldots,$, due delle quali avranno al più comune parte del contorno, e che saranno tutte campi fondamentali per G. La difficoltà di rendere rigoroso questo ragionamento è dovuta, sia alla grande varietà di gruppi G pr. dis., sia alla grande arbitrarietà, con cui si può far ingrandire un intorno α_0 in modo che diventi un campo fondamentale.

Sia K un campo fondamentale per G (a uno o più pezzi).

Ogni punto A di R è equivalente ad almeno un punto di K; se esso è equivalente a due punti di K, questi due punti giacciono su p, e quindi sul contorno di K.

Questo teorema è conseguenza immediata della definizione di campi fondamentali.

P. es. il gruppo G delle trasformazioni $x' = x + n$ (n intero) è pr. dis. su tutta la retta r, in cui x è coordinata non omogenea. Il segmento $0 \leq x \leq 1$ è un campo K fondamentale per G. Il contorno di questo campo è formato dei due punti *equivalenti* $x = 0$, $x = 1$. Un punto di r, non equivalente a questi due punti, è equivalente a uno e un solo punto di K.

Le proprietà, dimostrate più sopra generalmente per gli insiemi fondamentali, valgono naturalmente per i campi fondamentali, purchè vi si introducano quelle modificazioni, che sono imposte dal fatto che due punti distinti del contorno di un campo fondamentale possono essere equivalenti. Noi le riassumeremo brevemente.

Da un dato campo fondamentale K si possono ottenere infiniti altri campi fondamentali mediante *cambiamenti leciti,* sostituendo a un pezzo H di K una regione H' equivalente ad H. Naturalmente anche i campi così ottenuti potranno essere o non essere connessi. Abbiamo già ammesso (§ 17, pag. 114) che nessuna trasformazione non identica di G possa lasciare fisso un punto A di R e tutti i punti di un intorno di A. Ne seguirà che in questo caso è soddisfatta per K l'ipotesi fatta in generale in questo paragrafo a pag. 144 per un insieme fondamentale P, ossia che:

Nessuna trasformazione non identica di G può lasciar fissi tutti i punti di K.

E più particolarmente:

Se una trasformazione T non identica di G lascia fisso un punto A, in ogni intorno di A esistono punti distinti equivalenti rispetto a T e quindi anche rispetto a G. Quindi: un punto A di K, non posto sul contorno p, non è lasciato fisso da alcuna trasformazione non identica di G.

Siano K' i campi trasformati di K mediante le trasformazioni di G. Quei punti di un campo K' trasformati del contorno di K formeranno il contorno del campo K' considerato. L'insieme dei punti di K', trasformati dei punti di p, si dirà l'insieme p'.

Se una trasformazione di G muta in sè stesso il campo K o un campo K', essa si riduce alla trasformazione identica.

Due trasformazioni distinte di G portano il campo K, o un campo K' in due campi distinti. Cioè: *Il gruppo G opera in modo semplicemente transitivo sui campi K, K'.*

Un punto A comune a due dei campi K, K' giace sul contorno di ambedue questi campi.

Infatti siano K_1, K_2 questi due campi: la trasformazione non identica T di G, che porta K_1 in K_2, porterà il punto A in un punto B del campo K_2. Se il punto B è distinto dal punto A, i due punti distinti A, B di K_2 sono equivalenti e quindi giacciono ambedue sul contorno di K_2. Se invece A e B coincidono, la T deve lasciare fisso il punto A. Il punto A deve ancora, per quanto abbiamo già detto, giacere sul contorno di K_1, e di K_2.

I campi K, K' riempiono tutta la regione R; due tali campi possono avere a comune solo parte del loro contorno.

Due campi K_i, K_j che abbiano comune una parte del contorno a $n-1$ dimensioni (essendo n il numero delle dimensioni di S) si diranno adiacenti: la parte del contorno comune si dirà una *faccia* (di prima specie) di K_i o K_j. Se esistono poi sulle varietà limiti di R dei punti, in ogni intorno dei quali esistono punti di K_i, e se tali punti formano una varietà a $n-1$ dimensioni, essi si diranno costituire una faccia (di seconda specie) di K_i. Sia ora f una faccia (di prima specie) di un campo K_i, e sia K_j il campo adiacente a K_i lungo f; la trasformazione di G, che porta K_j in K_i, porterà K_i in un altro campo K_l, adiacente a K_i lungo una nuova faccia f'. Punti corrispondenti di f ed f' saranno equivalenti rispetto a G. Quindi: Un punto A del contorno di un campo K_i, che non giaccia sul contorno di R, ed appartenga a una e una sola faccia di prima specie di K_i, sarà equivalente ad uno e un solo altro punto B del contorno di K_i, che generalmente sarà distinto da A.

Se K_0 è un campo fondamentale, indicheremo con $T_i (i=1,2,...)$ quelle trasformazioni, che portano K_0 in un campo adiacente.

Se K_j è il campo, trasformato di K_0 mediante una ***trasformazione*** *U di G, le trasformazioni, che portano K_j* ***in un campo*** *adiacente sono le $U T_i U^{-1}$.*

Nei casi più importanti, che noi troveremo nel seguito, da

un campo fondamentale K_0 si può passare a ogni altro K_j, attraversando un numero finito s di campi $K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots K_{i_s}$ tali che ciascuno dei campi

$$K_0\ K_{i_1}\ K_{i_2} \ldots K_{i_s}\ K_j$$

sia adiacente a quello che lo precede, e a quello che lo segue.

In tal caso *ogni trasformazione V di G o è una trasformazione T_i, che porta K_0 in un campo adiacente, oppure è prodotto di più trasformazioni T_i*. Sia infatti K_j il campo, in cui la V porta K_0 e siano

$$K_0, K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_s}, K_j$$

campi a due a due adiacenti. Poniamo per simmetria $j = i_{s+1}$. La trasformazione di G, che porta K_0 in K_{i_1} è una trasformazione T. Per dimostrare il nostro teorema, basterà dunque far vedere che, se esso è vero per la trasformazione V' che porta K_0 in K_{i_r} $(r \leq s)$, esso è pur vero per la trasformazione V'', che porta K_0 in $K_{i_{r+1}}$. Infatti, per una precedente osservazione, la trasformazione che porta K_{i_r} in $K_{i_{r+1}}$ è del tipo $V'\ T\ V'^{-1}$, dove T è una delle trasformazioni, che portano K_0 in un campo adiacente. E la trasformazione V'' sarà dunque la $V'\ T\ V'^{-1}\ V' = V'\ T$. Se dunque V' è una trasformazione T, o un prodotto di trasformazioni T, anche la V'' è un prodotto di trasformazioni T.

c. d. d.

Le trasformazioni T, insieme ai loro prodotti fatti in tutti i modi possibili, esauriscono dunque le trasformazioni di G; ossia, come si suol dire, sono un ***sistema di trasformazioni generatrici*** di G.

Queste considerazioni si possono illustrare con un esempio. Sia G il gruppo delle trasformazioni $x' = x + m + n\,i$ (m, n interi) sulla variabile complessa x. R è il piano π della variabile complessa x. Il contorno (la varietà limite) di R si riduce al punto all'infinito di questo piano. G si può considerare come gruppo di movimenti in una metrica euclidea esistente su π.

Il quadrato di π che ha per vertici i punti 0, 1, i, $1+i$ è un campo fondamentale K_0 per G. I lati opposti di questo quadrato sono tra loro equivalenti; le trasformazioni $x' = x + 1$, $x' = x + i$, che portano un lato di K_0 nel lato opposto, formano un sistema di sostituzioni generatrici per G. I campi K_i trasformati di K_0 non sono poi che i quadrati, i cui vertici sono i punti $m + in$, $(m+1) + in$, $m + i(n+1)$, $(m+1) + i(n+1)$, dove m, n sono interi arbitrarii; essi riempiono tutto il piano, eccetto il punto $x = \infty$, ecc. ecc.

Se noi togliamo da K_0 per esempio il triangolo H, che ha per vertici i punti 0, 1, i, la regione K' (non connessa), che è formata dal triangolo residuo (i cui vertici sono 1, i, $1+i$) e da un triangolo qualsiasi H', equivalente ad H, di vertici $p + iq$, $p + iq + 1$, $p + iq + i$ (dove p, q sono interi arbitrarii), si può ancora considerare come un campo fondamentale, che è ottenuto da H mediante un *cambiamento lecito*.

§ 25. — Alcuni teoremi relativi alla costruzione dei campi fondamentali.

Sia G un gruppo, che trasformi in sè stessa una regione R dello spazio ambiente S, e sia pr. dis. in ogni punto di R, e quindi anche in R. Indicheremo con W l'insieme dei punti che non appartengono a R, pure esistendo in ogni loro intorno punti appartenenti a R: sia cioè W il contorno di R.

Dalle nostre ipotesi segue che, se A è un punto di R e quindi non appartenente a W, e se $B, B', B'' \ldots .$ sono punti tra di loro equivalenti rispetto a G, il punto A non può essere punto limite dell'insieme dei punti $B, B', B'' \ldots .$

Noi supporremo di più che esista una funzione $H(x)$ delle coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dei punti di R, positiva, finita, continua, a un sol valore dei punti di R, tale che:

I punti di R per cui

$$H(x) \leq \varkappa \qquad (\varkappa = \text{costante positiva finita qualunque})$$

formano un insieme di punti, i cui punti limiti appartengono tutti a R. Nessuno di questi punti limiti potrà quindi appartenere a W.

Consideriamo un punto A_0 e i suoi punti equivalenti $A_1, A_2, A_3 \ldots$. Indicheremo con $H_0, H_1, H_2 \ldots$ i valori di H rispettivamente nei punti $A_0, A_1, A_2 \ldots$. Sia λ il limite inferiore delle H_ι. Potrà avvenire uno dei seguenti tre casi.

1. Un certo numero finito m delle H_ι, p. es. le

$$H_{\iota_1}, H_{\iota_2}, \ldots, H_{\iota_m},$$

hanno il valore λ; le altre H_ι sono maggiori di λ.

2. Alcune, o tutte le quantità H_ι, in numero infinito, sono uguali a λ.

3. Nessuna quantità H è uguale a λ; ma se λ_1 è una costante qualsiasi maggiore di λ, esistono infinite quantità H, il cui valore è compreso tra λ e λ_1.

Nel secondo e nel terzo caso esisterebbero infiniti punti A_ι, in cui la H assume valori minori di $\lambda + \varepsilon$ ($\varepsilon =$ costante positiva finita qualunque). Questi punti A_ι dovrebbero, per le proprietà ammesse per la funzione H, formare un gruppo infinito di punti, i cui punti limiti dovrebbero appartenere ad R. Ciò che è assurdo per l'ipotesi fatta che G sia pr. dis. in ogni punto di R. Dei tre casi citati, può dunque avvenire soltanto il primo; esistono cioè m punti ($m =$ numero intero finito)

$$A_{\iota_1}, A_{\iota_2}, \ldots A_{\iota_m} \tag{8}$$

in cui la funzione H acquista uno stesso valore λ, minore dei valori, che essa acquista negli altri punti A. Dato uno qualsiasi dei punti $A_0, A_1, A_2, \ldots$, è completamente individuato il sistema degli m punti (8), ad essi equivalenti. Al variare del punto A_0 in R, variano corrispondentemente i punti (8); e naturalmente potrà variare anche l'intero m. Indicheremo con $x_{s\rho}$ ($\rho = 1, 2, \ldots n$) le coordinate del punto A_{ι_s} ($s = 1, 2, \ldots, m$). Tra i punti A_{ι_s} ne esiste uno e uno solo, che indicheremo con A_{ι_r} ($r \leq m$), tale che,

per ogni valore di s differente da r e non maggiore di m, la prima delle differenze

$$\delta_1 = x_{s1} - x_{r1};\ \delta_2 = x_{s2} - x_{r2};\ \ldots\ldots;\ \delta_n = x_{sn} - x_{rn},$$

che non è nulla, sia negativa. Dato uno qualunque dei punti $A_0, A_1, A_2, \ldots$ resta così completamente individuato un punto A_{i_r}, ad essi equivalente. Noi diremo che il punto A_{i_r}, così determinato tra i punti $A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots$ è il punto ***ridotto***, corrispondente ad A_0 (od a $A_1, A_2, \ldots$). Quindi: ***Ogni punto A_0 interno a R individua uno e un sol punto ridotto*** (equivalente ad A_0). ***Condizione necessaria e sufficiente affinchè due punti A, B di R siano equivalenti è che determinino uno stesso punto ridotto.***

L'insieme dei punti ridotti è quindi un insieme fondamentale per G.

Nelle pagine seguenti dimostreremo, per alcuni tipi di gruppi G, che questo insieme fondamentale definisce proprio un campo fondamentale per G.

Applicheremo dapprima le precedenti considerazioni generali ai gruppi di movimenti p. d. t. i. in una metrica (o ipermetrica) reale. Noi vedremo che esse ci offrono un mezzo ***per costruire, per tali gruppi G, un campo fondamentale.*** Risulterà così ancora una volta la importanza per il nostro studio del concetto di ***metrica***, illustrato nella prima parte del presente trattato.

In una metrica qualsiasi diremo ***distanza geodetica*** di due punti A, B, o più brevemente ***distanza*** AB il limite inferiore delle lunghezze delle curve, terminate ai punti A, B. Così, se A, B, C sono tre punti qualunque, sarà $AC \leq AB + BC$.

Sia G un gruppo p. d. t. i. di movimenti in una metrica M di uno spazio S. Sia R quella regione di S (che supporremo connessa), luogo dei punti, in cui M è regolare (§ 23, pag. 140). Sia W il luogo dei punti (in cui M non è regolare) che, pure non appartenendo a R, sono punti limiti di punti appartenenti

a R. Il gruppo G trasformerà R in sè stessa, e sarà pr. dis. in ogni punto di R, e in R.

Noi *ammetteremo che la distanza geodetica di due punti A, B interni a R diventi infinitamente grande, allora e allora soltanto che uno dei punti B si avvicina indefinitamente a un punto di W.*

In questa ipotesi noi prenderemo come funzione H dei punti A_0 di coordinate $(x_1 \ldots . x_n)$ di R la distanza geodetica $A_0 C_0$ dal punto A_0 a un punto *fisso* C_0 interno a R. È ben evidente che questa funzione H soddisfa alle proprietà, ammesse più sopra. Noi potremo quindi costruire coi metodi precedenti il punto *ridotto* equivalente a un punto qualsiasi A di R. L'insieme P, formato da tutti questi punti ridotti, è un insieme fondamentale per G. Per dimostrare che, *se C_0 è generico,* questo insieme è un campo fondamentale, dovremo premettere due lemmi.

Lemma I. — *Se A_0 è un punto tale che la distanza $A_0 C_0$ è maggiore delle distanze da C_0 a un numero finito h di punti $A_1, A_2, \ldots, A_h$ $(h \geqq 1)$ equivalenti ad A_0, ossia se il valore $H(A_0)$ di H in A_0 è maggiore dei valori di H in $A_1, A_2, \ldots, A_h$, esiste un intorno γ di A_0, i cui punti godono della stessa proprietà.* Infatti esiste evidentemente una costante $\delta > 0$, tale che $H(A_0) - H(A_i) > \delta > 0$ per $i = 1, 2, \ldots . h$. Sia α_j un intorno di A_j (per $j = 0, 1, 2, \ldots . h$) tale che ogni punto B_j di α_j soddisfi alla $| H(A_j) - H(B_j) | < \frac{\delta}{2}$. Le trasformazioni di G che portano A_i $(i = 1, 2, \ldots, h)$ in A_0, portano α_i in certi intorni β del punto A_0. Sia γ un intorno di A_0, interno ad α_0, e a tutti questi intorni β. Se B_0 è un qualsiasi punto di γ, e B_i è un punto equivalente a B_0 ed interno a α_i $(i = 1, 2, \ldots, h)$, sarà evidentemente:

$$| H(B_0) - H(A_0) | < \frac{\delta}{2}, \quad | H(B_i) - H(A_i) | < \frac{\delta}{2},$$

e quindi

$$H(B_0) > H(B_i).$$

c. d. d.

LEMMA II. — *Se A_0 è un punto tale, che la distanza $A_0 C_0$ sia minore di tutte le distanze $A_i C_0$ da C_0 a un punto A_i equivalente a A_0, esiste un intorno di A_0, i cui punti godono della stessa proprietà.*

Sia α_0 un intorno di A_0; e sia N una costante positiva maggiore dei valori assunti da H nei punti di α_0. Nella regione perfetta R', i cui punti (x) soddisfano alla $H(x) \leq N$, potrà penetrare soltanto un numero finito $k-1$ di intorni α_i equivalenti ad α_0, perchè, per le nostre ipotesi, le trasformazioni di G, che possono portare un punto di α_0 in un punto di R' sono in numero finito *). Indicheremo con $\alpha_0, \alpha_1, \ldots\ldots \alpha_k$ questi intorni. Con un ragionamento simile al precedente vediamo che, se γ è un intorno abbastanza piccolo di A_0, interno ad α_0, allora per ogni punto B_0 di γ è $H(B_0) < H(B_i)$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots k)$, se B_i è un punto di α_i equivalente a B_0. D'altra parte i punti equivalenti a B_0, distinti da $B_1, B_2, \ldots\ldots B_k$, sono esterni a R', cosicchè il valore assunto da H in un tal punto è maggiore di $N > H(B_0)$. L'intorno γ è quindi l'intorno cercato.

Consideriamo ora una regione *perfetta* R', interna a R. Ogni insieme di punti, appartenenti a R', avrà per punti limiti dei punti tutti appartenenti a R'. Cerchiamo i punti A_0 di R' tali che la distanza $A_0 C_0$ *sia uguale alla distanza da C_0 ad almeno un punto A_i, equivalente ad A_0*. Sia N una costante positiva più grande del massimo valore assunto da $H(A_0)$ (da $A_0 C_0$), quando A_0 varia in R'. In un punto A_i, equivalente ad un punto A_0 di R', tale che $H(A_i) = H(A_0)$, sarà $H(A_i) < N$; quindi A_i appartiene alla regione *perfetta* R'', in cui H assume valori non maggiori di N. Le trasformazioni T di Γ, che portano un punto di R' in un punto di R'' sono in numero *finito*: noi le indicheremo con

---

*) Infatti, se α_0 è contenuto nell'ipersfera di centro A_0 e raggio ε, tali trasformazioni debbono portare A_0 in un punto della regione R', i cui punti (x) soddisfano alla $H(x) \leq N - \varepsilon$.

$T_1, T_2, \ldots, T_h$. I punti A_0 cercati sono i punti x di R', che giacciono su una delle h ipersuperficie V_i, definite rispettivamente dalle

$$H(x) = H(T_i\, x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, h).$$

E nessuna di queste equazioni si riduce all'identità, se nessuna trasformazione di G trasforma in sè stessa la funzione H, cioè se nessuna trasformazione di G lascia fisso il punto C_0, ossia se C_0 è un punto *generico*. Notiamo ancora che, se A_0 è un punto di una di questa ipersuperficie, ossia se A_0 è equivalente a un punto A_i tale che $A_0\, C_0 = A_i\, C_0$, allora la trasformazione, che porta A_i in A_0, porterà C_0 in un punto equivalente C_j; sarà quindi $A_i\, C_0 = A_0\, C_j$, e quindi $A_0\, C_0 = A_0\, C_j$. Il punto A_0 è equidistante da C_0 e C_j. Le nostre ipersuperficie sono dunque *luogo dei punti equidistanti da C_0 e da un punto equivalente a C_0*. Indicheremo con V_i il pezzo della V_i, che appartiene a R'. Eccettuati i punti delle V_i, ogni altro punto A_0 di R' gode della proprietà che la distanza $A_0\, C_0$ *non è mai uguale* alla distanza da C_0 a un qualsiasi punto A_i, equivalente ad A_0. Consideriamo quelli tra questi punti A_0 di R', che appartengono a P, ossia consideriamo quei punti A_0 di R', la cui distanza da C_0 è minore delle distanze da C_0 a uno qualunque dei punti equivalenti a A_0. Consideriamo i punti limiti B del gruppo di punti, formato da questi punti A_0. *Un tal punto limite B_0 appartiene a P, oppure cade su una delle ipersuperficie V_i*. Infatti, se così non fosse, una almeno delle distanze $B_i\, C_0$ $(i > 0)$ sarebbe minore della distanza $B_0\, C_0$. Per il lemma I sopra dimostrato, in un intorno sufficientemente piccolo di B_0 non potrebbero esistere punti di P; ciò che è assurdo, perchè per ipotesi B_0 è un punto limite del gruppo di punti, formato dai punti di P interni a R'.

In modo analogo dal secondo lemma si deduce che i punti di R', non appartenenti a P, possono avere come punti limiti soltanto punti non appartenenti a P, oppure punti posti su una delle varietà V_i. È poi ben chiaro che una linea continua contenuta in R', che abbia per estremi un punto di P e un punto

non appartenente a P, deve contenere almeno un punto (eventualmente un estremo) posto su una delle varietà V_i. Di più, se B_0 è un punto di P, interno a R', il quale non giace su una delle V_i, e appartiene (non appartiene) a P, allora si può costruire un intorno di B_0 (cfr. i lemmi dimostrati più sopra), i cui punti godono delle stesse proprietà.

Da tutto quanto abbiamo detto risulta (quando si usino di nuovo le notazioni del § 24):

I punti di p, comuni all'insieme P_1 (somma dell'insieme P e dell'insieme derivato) *e all'insieme Q_1, che appartengono a R', giacciono tutti sulle V_1, V_2, ..., V_k.*

I punti di P interni a R' riempiono una regione R_1, che ha per contorno dei pezzi delle ipersuperficie V ed eventualmente dei pezzi del contorno di R'. I punti di R', che non appartengono a P, formano un'altra simile regione R_2. Una linea di R', che vada da un punto di R_1 a un punto di R_2, attraversa qualche ipersuperficie V.

Se facciamo ingrandire R', in modo che essa tenda alla regione completa R, la regione R_1 o non varierà più da un certo punto in poi, o andrà sempre ingrandendo. In quest'ultimo caso può avvenire che il numero delle ipersuperficie V di separazione tra la R_1 e R_2 aumenti indefinitamente.

La regione R_1 (o il limite di una tale regione, quando R' va ingrandendo) è evidentemente un *campo fondamentale* K_0 per G in R, che contiene il punto C_0, e si chiama *il campo normale di centro* C_0. I campi fondamentali K_1, K_2, ... trasformati di K_0 per le trasformazioni di G saranno rispettivamente i campi *normali*, il cui centro è C_1, C_2, ...

Se due campi normali K_i, K_j sono adiacenti, la faccia comune sarà formata tutta di punti equidistanti dai loro centri.

Osservazione. — In una regione perfetta R', interna a R, non può penetrare che un numero finito di campi fondamentali. Potremo ammettere che C_0 sia interno a R'. Un punto A_0 di R', che appartenga a un campo fondamentale K_i, deve avere dal

centro corrispondente C_i una distanza non maggiore di $A_0 C_0$. Quindi $C_0 C_i \leq A_0 C_0 + A_0 C_i \leq 2 A_0 C_0$. Quindi i campi, che penetrano in R', sono compresi tra quei campi (in numero finito), i cui centri sono interni all'ipersfera di centro C_0 e raggio 2λ, se λ è la massima corda di R'.

Le considerazioni generali, svolte in principio del presente paragrafo, si possono applicare, oltre che ai gruppi di movimenti, anche ai gruppi G p. d. t. i. di trasformazioni reali (complesse) lineari intere omogenee unimodulari su n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, coordinate omogenee in uno spazio Σ. Noi abbiamo già visto che un tale gruppo G è pr. dis. (teoremi VI^bis e VII^bis, § 21, pag. 128) in una regione R di uno spazio S, così definita. S è lo spazio, in cui sono coordinate omogenee i coefficienti (la parte reale e la parte immaginaria dei coefficienti) delle forme F_{2h} algebriche di uno stesso grado $2h$ (F_2 Hermitiane) delle variabili x. R è quella regione di S che è immagine di forme definite. Per fissare le idee supponiamo che G sia un gruppo reale; e indichiamo con $y_1, y_2, \ldots, y_m$ i coefficienti delle forme F, che sono coordinate omogenee in S. Noi potremo fissarne il fattore di proporzionalità in guisa che un invariante non assoluto delle F (p. es. il discriminante, se $h = 1$) abbia un valore costante, prefissato *a priori*. Il gruppo G dà origine a un gruppo Γ di trasformazioni lineari intere omogenee unimodulari sulle y.

Assumiamo come funzione H una forma algebrica definita positiva *generica* delle y_i. È facile riconoscere che questa funzione gode delle proprietà supposte in generale al principio del paragrafo, e che in sostanza si riducono a questa:

Se d è una costante positiva qualunque, ed R' è la regione di S, in cui $H(y) \leq d$, esiste al più un numero finito di trasformazioni di Γ, che portano un punto di R' in un punto di R'.

Infatti, per i lemmi del § 19 (pag. 119), le coordinate y di un punto di R' sono inferiori in valore assoluto a una stessa costante finita. E la trasformazione di G, che corrisponde a una trasformazione

di Γ, che porta un punto di R' in un altro punto di R', ha quindi i coefficienti minori in valore assoluto di una stessa costante. Poichè G è p. d. t. i., queste trasformazioni sono dunque in numero *finito*. E noi le potremo indicare con $T_1, T_2, \ldots, T_r$ (r intero finito). Si possono così dimostrare nel caso attuale lemmi perfettamente analoghi a quelli sopra dimostrati per i gruppi di movimenti, e dedurne conseguenze affatto simili. Le r ipersuperficie $H(y_1, y_2, \ldots, y_m) = H(T_i y_1, T_i y_2, \ldots, T_i y_m)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ hanno nel caso attuale l'ufficio, che le ipersuperficie V avevano per i gruppi di movimenti. E noi troviamo così il teorema:

Ogni gruppo proiettivo p. d. t. i. ha sempre un campo fondamentale, quando lo si pensi operante in uno spazio S, i cui punti corrispondono biunivocamente alle forme algebriche F_{2k} o Hermitiane F_2 delle coordinate omogenee x dello spazio iniziale Σ.

Osservazione. — Anche per i gruppi G, cui si riferisce il teorema XII del § 21, si può facilmente dimostrare l'esistenza in R' di una rete di campi fondamentali. (Cfr. loc. cit. per le notazioni). Infatti se K è un campo fondamentale per G in R, i punti B di R', a cui corrisponde in R un punto reale C, interno a K, formano evidentemente in R' un campo fondamentale K' per G.

§ 26. — Osservazioni varie relative alla costruzione dei campi fondamentali; ed esempii.

Nel presente paragrafo mi propongo di dare altri metodi, che talvolta permettono pure di costruire i campi fondamentali di un dato gruppo pr. dis.

Le considerazioni seguenti non hanno alcuna pretesa di rigore, ma vogliono solo indicare il modo generale di procedere.

Sia dato un gruppo G pr. dis. in una regione R di uno spazio S, che noi supporremo trasformata in sè stessa da G. E sia dato in R un sistema numerabile Σ di ipersuperficie $V_0, V_1, V_2, \ldots$ tali che ogni trasformazione di G porti una qualunque ipersuperficie di Σ in un'altra ipersuperficie di Σ. Può accadere che queste ipersuperficie dividano R in infinite regioni parziali R_0,

R_1, R_2 ...., ciascuna delle quali sia limitata da pezzi di ipersuperficie V, e non contenga all'interno un punto appartenente a una delle ipersuperficie V. In tali ipotesi ogni trasformazione di G porta una di queste regioni R_i in un'altra di queste regioni (*). Cosicchè se due punti A, B di R, interni rispettivamente a R_i, R_j sono equivalenti, la trasformazione di G, che porta A in B, porta R_i in R_j. Diremo equivalenti due regioni R_i, R_j, quando esiste almeno una trasformazione di G, che porta R_i in R_j. Aggrupperemo queste regioni R_i in altrettanti sistemi parziali M_1, M_2, M_3 ...., in guisa che due regioni di uno stesso sistema siano equivalenti tra loro, e due regioni R_i, non appartenenti allo stesso sistema, non siano equivalenti tra loro. Prendiamo una regione $R^{(1)}$ dal sistema M_1, una regione $R^{(2)}$ dal sistema M_2, una regione $R^{(3)}$ dal sistema M_3, ecc. Consideriamo il sottogruppo $G^{(1)}$ di G (che può eventualmente ridursi alla sola identità) che trasforma $R^{(1)}$ in sè stesso. Costruiamo in un modo qualunque (§ 24, pag. 144) un insieme $P^{(1)}$ fondamentale per $G^{(1)}$ in $R^{(1)}$; altrettanto facciamo nelle regioni $R^{(2)}$, $R^{(3)}$...., in cui costruiremo rispettivamente un insieme $P^{(2)}$, un insieme $P^{(3)}$, ecc. L'insieme P di punti, che è somma degli insiemi $P^{(1)}$, $P^{(2)}$...., è un insieme *fondamentale* per G in R. Un caso specialmente importante è quello, in cui

α) Le regioni R_i sono tutte equivalenti tra loro.

β) Nessuna trasformazione di G, oltre l'identità, trasforma in sè stessa una regione R_i.

In questo caso una *qualunque* delle regioni R può servire come *campo* fondamentale per G.

Per costruire un sistema Σ di ipersuperficie V, trasformato in sè stesso da G, basta prendere una ipersuperficie V_0 qualun-

(*) Se ciò non fosse, R_i sarebbe portata dalla T in una regione, contenente all'interno un punto di una delle V: ciò che è assurdo, perchè il sistema delle ipersuperficie V è trasformato in sè stesso, e la R_i non contiene al suo interno alcun punto di una ipersuperficie V.

que e le sue trasformate. Se esiste in G una ipersuperficie U, i cui punti sono tutti lasciati fissi da una stessa trasformazione T di G, si suol prendere proprio la U come ipersuperficie V_0. I punti della ipersuperficie trasformata di U per una trasformazione T_1 di G saranno tutti lasciati fissi dalla trasformazione $T_1 \, T \, T_1^{-1}$ di G.

Questa scelta non è dovuta già a ragioni pratiche, ma ha le sue proprie ragioni teoriche (*).

Infatti, poichè un punto della ipersuperficie U, o delle sue trasformate, è lasciato fisso, come dicemmo, da una qualche trasformazione di G, in ogni suo intorno esistono coppie di punti distinti equivalenti; un tal punto non può perciò essere interno a un campo fondamentale, e quindi giacerà necessariamente sul contorno di un qualche campo fondamentale, ammesso che tali campi esistano.

Di più la ipersuperficie U e le sue trasformate devono necessariamente dividere R in regioni parziali: se ciò non fosse, ogni intorno α di un punto generico A di R, dovrebbe essere attraversato da qualcuna delle ipersuperficie U; e, poichè in ogni intorno di un punto di una delle U il gruppo G possiede punti equivalenti, il gruppo G non sarebbe pr. dis. in ogni punto generico A di R: ciò che è assurdo. Notiamo ancora che, se G fosse un gruppo di movimenti, una ipersuperficie U, lasciata fissa da una trasformazione T di G, sarebbe una ipersuperficie, i cui punti hanno uguali distanze geodetiche da un punto C e dal punto C', trasformato di C mediante la T: ciò che dimostra gli stretti legami che uniscono le teorie qui svolte, e i metodi del § 25.

Prima di dare alcuni esempii particolari, premetterò una osservazione generale, il cui completo sviluppo sarà dato soltanto in un altro capitolo. Sia K_0 un campo fondamentale per un

---

(*) La seguente osservazione mi fu suggerita dal Dott. E. Levi.

gruppo Γ, e siano K_1, K_2, ... i campi equivalenti a K_0. Sia G un sottogruppo di Γ, di indice finito m. Siano τ_0, τ_1, τ_2 .... le trasformazioni di G. Esisteranno m trasformazioni $U_0 = 1$, $U_1, \ldots,$ U_{m-1} (§ 3, pag. 12) distinte di Γ, tale che ogni trasformazione T di Γ si può scrivere in uno e in un solo modo nella forma $U_j \tau_i (i = 0, 1, 2, \ldots) (j = 0, 1, \ldots, m - 1)$. Anche la T^{-1} si potrà dunque scrivere in un solo modo sotto la forma $U_j \tau_i$, con certi altri valori degli indici j, i. E quindi la T si potrà scrivere in un solo modo sotto la forma $\tau_i^{-1} U_j^{-1}$. Posto $U_j^{-1} = V_j$, e ricordato che τ_i^{-1} è uguale a una trasformazione τ_s di G, avremo che ogni trasformazione T di Γ si può scrivere in uno e in un solo modo sotto la forma $\tau_s V_i$ $(j = 0, 1, \ldots, m - 1; s = 0, 1, 2, \ldots)$. E noi potremo disporre le operazioni di Γ in un quadro, in guisa che le operazioni $\tau_s V_j$, corrispondenti a uno stesso valore di j, *appartengano a una stessa orizzontale*. I campi fondamentali K_0, K_1, K_2, ... (tutti equivalenti rispetto a Γ) non saranno tutti equivalenti rispetto a G; e precisamente due campi fondamentali K_i e K_j saranno equivalenti rispetto a G soltanto quando sono trasformati di K_0 mediante due trasformazioni di Γ, appartenenti a una stessa orizzontale del quadro; quindi il campo K_0 e i campi trasformati di K_0 mediante le $V_1, V_2, \ldots, V_{m-1}$ costituiscono insieme un campo fondamentale per G, che potrà essere o non essere connesso. Tutto ciò sarà reso più chiaro dagli esempii seguenti, a cui noi applicheremo ora le precedenti considerazioni.

I. *Gruppo modulare.* — Si dice gruppo modulare il gruppo G delle trasformazioni

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \tag{9}$$

sulla variabile complessa $x = \xi + i\eta$, dove le α, β, γ, δ sono interi razionali legati dalla

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{10}$$

Il gruppo G è evidentemente p. d. t. i.; e in ciascuno dei semipiani, in cui l'asse r delle quantità reali (la retta $\eta = 0$) divide il piano π della variabile x, si può considerare come un gruppo di movimenti in una metrica di Bólyai. Esso è dunque in ciascuno di questi semipiani pr. dis. (§§ 14, 21). Noi studieremo p. es. il semipiano π_1, per cui è $\eta > 0$.

Per i risultati del § 14, nessuna trasformazione di G può trasformare in sè tutti i punti di una stessa linea. Non potremo dunque applicare senz'altro il metodo precedente: e noi perciò ricorreremo a un artificio, il cosidetto ***ampliamento per riflessione o per simmetria.***

L'idea fondamentale di questo artificio è la seguente. Cerchiamo di trovare un gruppo Γ, in cui G sia contenuto come sottogruppo di indice finito, e che contenga qualche trasformazione, che lascia fissi tutti i punti di una certa linea. Allora col metodo svolto più sopra determineremo un campo fondamentale per Γ: e, secondo i risultati della precedente osservazione, cercheremo poi di formare un campo fondamentale per il nostro gruppo G, riunendo insieme un certo numero di campi fondamentali per il gruppo Γ.

Consideriamo la trasformazione $x' = - x_0$. Essa è, nella nostra metrica, un movimento U (§ 14, pag. 83) di seconda specie, anzi precisamente una *simmetria*, che lascia fissi tutti i punti della geodetica $\xi = 0$. Moltiplicando la (9) per questa simmetria U otterremo una nuova trasformazione definita dalla:

$$x' = \frac{-\alpha x_0 + \beta}{-\gamma x_0 + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1). \tag{11}$$

Le trasformazioni (9), (11) generano evidentemente un gruppo Γ, in cui G è contenuto come sottogruppo di indice 2, e che si dice gruppo *ampliato,* perchè è stato ottenuto da G, ***ampliando G con la riflessione U.*** Per i risultati del § 14, quelle delle trasformazioni (11), per cui è $\alpha = \delta$, sono tutte simmetrie, che trasformano in sè stesso ogni punto della geodetica

$$\gamma(\xi^2 + \eta^2) - 2\alpha\xi + \beta = 0 \qquad \eta > 0 \qquad (\alpha^2 - \beta\gamma = 1). \tag{12}$$

Questa geodetica ha naturalmente per immagine su π_1 un semicerchio (o una semiretta, se $\gamma = 0$ e quindi $\alpha^2 = 1$), che incontra r ortogonalmente. Noi chiameremo questi cerchi e queste rette ***cerchi*** e ***rette di riflessione.***

Come abbiamo già osservato in generale, ***questi cerchi e queste rette formano un insieme di linee*** V, ***invarianti per*** Γ, ***ossia ogni trasformazione di*** Γ ***porta una linea di riflessione in un'altra linea di riflessione.*** Infatti, se T è una riflessione di Γ sulla linea V_1, e se una trasformazione T_1 di Γ porta V_1 in un'altra linea V_2, la V_2 sarà una linea di riflessione per la trasformazione $T_1\, T\, T_1^{-1}$ di Γ. Ancora noi sappiamo già che esistono regioni di π, in cui non penetrano linee di riflessione; possiamo però dimostrare di più che ***in ogni regione finita*** R', ***interna a*** π_1 (i punti della quale hanno cioè da r una distanza euclidea maggiore di una costante ε maggiore da zero) ***non possono penetrare infinite linee di riflessione.*** Indicheremo con h la massima distanza di un punto di R' dall'asse delle η; per le nostre ipotesi, h sarà una costante positiva *finita.*

Le rette di riflessione hanno per equazione $\xi = \frac{\beta}{2\alpha}$, dove $\alpha^2 = 1$, ossia $\alpha = \pm 1$; ossia le rette di riflessione hanno per equazione $2\xi = m$, dove m è un numero intero. Quindi è ben chiaro che R' può essere intersecata soltanto da un numero finito di rette di riflessione, perchè, per tali rette, $\left|\frac{m}{2}\right| \leq h$. Il cerchio di riflessione (12) ha per raggio $\sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\gamma^2}} = \pm\frac{1}{\gamma}$. Affinchè esso penetri entro R', dovrà dunque essere $\left|\frac{1}{\gamma}\right| \geq \varepsilon$, ossia $|\gamma| \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Poichè γ è intero, γ può avere soltanto un numero finito di valori. Poichè il massimo raggio di un cerchio (12) di riflessione è l'unità, il centro di un cerchio, che penetri entro R', avrà una ascissa non maggiore di $h + 1$. Ma l'ascissa del centro del cerchio (12) è $\frac{\alpha}{\gamma}$. Sarà dunque $\left|\frac{\alpha}{\gamma}\right| \leq h + 1$. Siccome $|\gamma| \leq \frac{1}{\varepsilon}$, sarà $|\alpha| \leq \frac{1}{\varepsilon}(h + 1)$; e quindi, poichè α è intero, an-

che α potrà avere soltanto un numero finito di valori. E poichè $\alpha^2 - \beta\gamma = 1$, anche β potrà avere soltanto un numero finito di valori. La regione R' è perciò intersecata al più da un numero finito di rette e di cerchi di riflessione.

c. d. d.

Questo teorema si poteva del resto dimostrare senza alcun calcolo. Se infatti esso non fosse vero, esisterebbe in R' almeno un punto A, in ogni intorno del quale penetrano infinite geodetiche di riflessione. E per i ragionamenti di pag. 160, il nostro gruppo non sarebbe pr. dis. in A: ciò che è assurdo.

Valendoci di questo teorema, potremo dimostrare che *le linee di riflessione dividono π_1 in infiniti triangoli curvilinei, tutti equivalenti tra loro rispetto al gruppo* Γ. Consideriamo le tre linee di riflessione

$$\xi = -\tfrac{1}{2}; \qquad \xi = 0; \qquad \xi^2 + \eta^2 = 1;$$

esse limitano in π_1 un triangolo Δ (i cui lati sono geodetiche, ossia rette o cerchi che tagliano r ad angolo retto). I vertici di Δ sono i punti $x = \infty$, $x = i$, $x = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Questo triangolo non è attraversato da alcuna linea di riflessione, come è facile riconoscere, servendoci della equazione (12) delle linee di riflessione (*).

(*) Una retta di riflessione, come già dicemmo, ha per equazione $2\xi = m$, dove m è un intero: è facile riconoscere quindi che nessuna di queste rette penetra in Δ. Un cerchio (12) di riflessione ha per raggio $\frac{1}{\gamma}$. Affinchè esso penetri in Δ deve contenere nel suo *interno* almeno uno dei punti $x = i$, $x = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi dovrebbe essere $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1}{\gamma}$, e, poichè γ è intero, si avrebbe $\gamma = 1$, ossia $\gamma = \pm 1$, e quindi $\alpha^2 = 1 \pm \beta$. Ma, affinchè il cerchio (12) (ove si ponga $\gamma = \pm 1$) contenga all'interno il punto $x = i$, oppure il punto $x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, deve essere $1 \pm \beta < 0$ oppure $1 \pm \beta + \alpha < 0$, ossia $\alpha^2 < 0$, oppure $\alpha^2 \pm \alpha < 0$. Queste disuguaglianze sono assurde, essendo α un intero reale, e quindi essendo $\alpha^2 \geq |\alpha| \geq 0$.

Esso è dunque una delle nostre regioni R_i. Se noi applichiamo a Δ le trasformazioni di Γ, otterremo infiniti altri triangoli, ciascuno dei quali sarà limitato da geodetiche di riflessione e non sarà attraversato da alcuna geodetica di riflessione; un punto interno a uno di questi triangoli non potrà appartenere ad alcun altro triangolo. Io dico che questi triangoli coprono tutto π_1. Sia infatti B un punto qualunque interno a π_1, ed A un punto qualunque interno a Δ; tiriamo una linea $A\,B$, che resti a distanza finita da r, e che non passi per alcun punto comune a due linee di riflessione. Essa, per quanto abbiamo visto, non potrà che incontrare un numero *finito* di linee di riflessione. Se il punto B è esterno a Δ, essa traverserà una almeno di queste linee: un lato di Δ. La nostra linea sarà quindi divisa in un numero finito di tratti $l_1, l_2, \ldots, l_k$ tali che il punto di divisione di due tratti appartiene a una e una sola linea di riflessione. Il tratto l_1 è interno a Δ; esso avrà due estremi: il punto A e un punto A' posto sul contorno di Δ. La riflessione relativa a quel lato di Δ, che passa per A', porterà Δ in un triangolo Δ', che conterrà al suo interno il tratto l_2. Se A'' è l'estremo di l_2, distinto da A', la riflessione attorno a quel lato di Δ' che passa per A'' porterà Δ' in un nuovo triangolo Δ'', che conterrà al suo interno l_3. Così continuando, finiremo col portare Δ in un altro triangolo, che contiene il punto B.

La nostra asserzione è così dimostrata.

Consideriamo il triangolo Δ; una trasformazione di Γ, che lo trasformasse in sè stesso, non potrebbe che permutarne i vertici $x = i$, $x = \infty$, $x = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Si riconosce facilmente che l'unica trasformazione (9) o (11), che possa far questo, è la trasformazione identica. Dunque nessuna trasformazione di Γ (oltre l'identità) lascia fisso il triangolo Δ. *Quindi*, per le nostre considerazioni generali, Δ, *o uno qualsiasi dei triangoli equivalenti, si può assumere a campo fondamentale di* Γ. Le tre trasformazioni

$$x' = -x_0, \qquad x' = -x_0 - 1, \qquad x' = \frac{1}{x_0}$$

sono le tre trasformazioni di Γ, che portano Δ in uno dei triangoli adiacenti, e sono riflessioni sui tre lati di Δ. Queste tre trasformazioni formano dunque (§ 24, pag. 149) un gruppo di trasformazioni generatrici per Γ.

Consideriamo il triangolo Δ e uno dei triangoli adiacenti Δ': p. es. il triangolo Δ' i cui vertici sono i punti $x = i, x = \infty, x = e^{\frac{\pi i}{3}}$ *Considerati insieme, i due triangoli* Δ, Δ' *formano un unico campo fondamentale D, che noi diciamo essere un campo fondamentale per G.* Infatti un punto *generico* B di π_1 ha un punto A equivalente in Δ, e un punto equivalente A' in Δ', rispetto al gruppo Γ. Dal punto A si passa al punto A' mediante la simmetria U definita dalla retta $\xi = 0$. Se dunque la trasformazione T di Γ, che porta B in A è un movimento di prima specie, ossia appartiene anche a G, la trasformazione T' di Γ che porta B in A' è uguale al prodotto $U\,T$, e quindi è di seconda specie, ossia non appartiene a G. Se invece la T è di seconda specie (non appartiene a G), la T' è di prima specie (appartiene a G). Esiste dunque entro D, in ambedue i casi, uno e un solo punto equivalente a B rispetto a G.

c. d. d.

Noi considereremo D anche come un quadrangolo, considerando il punto $z = i$ come un vertice di D. In tal caso D avrà 4 lati: il lato che va dal punto $x = \infty$ al punto $x = e^{\frac{\pi i}{3}}$: il lato che va da quest'ultimo punto al punto $x = i$; il lato che va dal punto $x = i$ al punto $x = e^{\frac{2\pi i}{3}}$; e infine il lato che va dal punto $x = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ al punto $x = \infty$. Il primo e l'ultimo lato sono equivalenti, perchè la trasformazione (di G)

$$x' = x + 1$$

porta l'uno nell'altro: il secondo e il terzo lato sono pure equivalenti, perchè la trasformazione

$$x' = -\frac{1}{x}$$

gruppo G porta l'uno nell'altro. Queste due trasformazioni tano dunque (§ 24, pag. 149) a generare il gruppo modulare.

Gruppo di Picard. — Si dice gruppo di Picard il gruppo G .e trasformazioni:

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \text{ oppure } \alpha\delta - \beta\gamma = i)$$

e le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono numeri interi complessi di Gauss, vale a numeri della forma $a + i b$ (dove a, b sono interi razionali). ;ruppo G di Picard è chiaramente p. d. t. i. Esso non lascia lentemente fisso alcuna retta, o alcun cerchio del piano della iabile complessa x e perciò è un gruppo kleiniano (§ 22, . 139). Esso si può quindi considerare come gruppo di movi- ıti in uno spazio di Bólyai a tre dimensioni (cfr. anche § 14, . 95), che noi potremo immaginare rappresentato conforme- ıte su un semispazio euclideo S a tre dimensioni, limitato piano π della variabile complessa x. Noi avremo così in sto semispazio un gruppo di trasformazioni conformi, che formano π in sè stesso. Anche qui la trasformazione $x' = -x_0$ presenta una simmetria nella metrica di Bólyai, che è rappsentata in S. *Ampliando* G con questa simmetria, otterremo, ıe sopra, un gruppo Γ in cui G è contenuto come sottogruppo indice 2. In Γ sono contenute le infinite ***riflessioni,*** definite equazioni del tipo:

$$x = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)\,x_0 + i\beta}{i\gamma\,x_0 + (\alpha_1 - i\alpha_2)} \qquad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta\gamma = 1)$$

pure

$$x = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)\,x_0 + (1 - i)\beta}{(1 - i)\gamma\,x_0 + (\alpha_2 + i\alpha_1)} \qquad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\beta\gamma = 1)$$

e le α, β, γ sono interi reali razionali. Le sfere e i piani di riflessio- corrispondenti dividono S in poliedri (tra loro equivalenti). Uno questi poliedri è quello limitato dai piani, che intersecano ortogo- lmente π lungo le rette $x + x_0 = 1$, $x - x_0 = 0$, $\frac{x}{1+i} = \frac{x_0}{i-1}$, e dalla

sfera, che taglia ortogonalmente π lungo il cerchio $x x_0 = 1$. Uno di questi poliedri può servire a Γ di campo fondamentale in π. L'insieme formato da due consecutivi di questi poliedri si può considerare come un campo fondamentale di G in S.

Tutte le proprietà, qui soltanto enunciate, si possono dimostrare con metodo analogo a quello usato per studiare il gruppo modulare; il lettore potrà trovare le dimostrazioni nelle ***Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*** del prof. BIANCHI (§ 25, pag. 72 e seg.) o nel trattato del FRICKE (pag. 76 e seg.).

Gruppo aritmetico riproduttore di una forma quadratica indefinita. — Tanto il gruppo modulare, quanto il gruppo di Picard si possono considerare come gruppi di movimenti reali in una metrica di Bólyai, ossia come gruppi di proiettività reali in un piano, o in uno spazio, che trasformano in sè stessa una conica reale, o una quadrica reale non rigata. Noi vogliamo applicare i metodi precedenti allo studio generale dei gruppi aritmetici riproduttori G (§ 22, pag. 136) di una forma quadratica $V = \Sigma a_{ik} x_i x_k$, a coefficienti interi razionali, quando la $V = 0$ rappresenta una quadrica reale Q non rigata nello spazio S, in cui le x_i $(i \leq n)$ sono coordinate omogenee. Questi gruppi, che si possono, come sappiamo, considerare tutti come gruppi di movimenti in una metrica di Bólyai, che abbia Q per assoluto, sono pr. dis. nella regione R interna a Q. Per applicare i nostri metodi, noi dobbiamo cominciare con la determinazione delle riflessioni, contenute in G. Le riflessioni non sono che le omologie armoniche, trasformanti Q in sè stessa, che lasciano fissi tutti i punti di un iperpiano I, che interseca la R, ossia che taglia Q in punti reali.

Sia $\Sigma b_i x_i = 0$ l'equazione di I. Ora, mutando, caso mai, i segni di tutte le a_{ik}, potremo ottenere che

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k < 0$$

sia la condizione, affinchè un punto x_i sia entro R. Indicando con A_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} nel determinante $|a_{ik}|$,

il polo A di I avrà le coordinate $\Sigma A_{ik} b_k$; affinchè I attraversi R, dovrà essere

$$\sum_{i,k} a_{ik} \sum_h A_{ih} b_h \sum_l A_{kl} b_l > 0,$$

ossia, posto $\Delta = |a_{ik}|$,

$$\Delta \Sigma A_{ik} b_i b_k > 0.$$

Ma, per le ipotesi fatte, $\Delta < 0$. Quindi

$$\Sigma A_{ik} b_i b_k < 0.$$

La riflessione determinata da I non è che l'omologia armonica, che ha I come iperpiano di omologia, e A come centro di omologia. Essa è quindi definita dalle seguenti equazioni:

$$y'_i = y_i - 2 \frac{\Sigma b_j y_j}{\sum\limits_{j,k} A_{jk} b_j b_k} \sum_k A_{ik} b_k.$$

Si verifica facilmente infatti che questa proiettività trasforma in sè stessa la forma V, e lascia fissi tutti i punti dell'iperpiano I. Affinchè questa proiettività appartenga a G, i suoi coefficienti devono essere numeri interi razionali. Quindi i rapporti delle b devono essere razionali; e noi potremo supporre che le b siano interi primi tra di loro. Il numero intero $\Sigma A_{ik} b_i b_k$ deve essere un divisore dell'intero $2 b_i \sum\limits_k A_{ik} b_k$, qualunque sia i. Poichè gli interi b_i sono primi tra di loro, l'intero $\Sigma A_{ik} b_i b_k$ (che sappiamo negativo) deve essere un divisore di $2 \sum\limits_k A_{ik} b_k$ e quindi anche di $2 \sum\limits_i a_{il} \sum\limits_k A_{ik} b_k = 2 \Delta b_l$, qualunque sia l. E, poichè le b_l sono interi primi tra loro, l'intero negativo $\Sigma A_{ik} b_i b_k$ deve essere un divisore dell'intero 2Δ, che è pure negativo. Indichiamo con δ_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, h)$ i divisori negativi (in numero finito h) dell'intero 2Δ. Avremo, per quanto abbiamo detto, che deve essere soddisfatto almeno uno dei seguenti sistemi di equazioni

$$(13)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i,k} A_{ik} b_i b_k = \delta_\alpha \\ 2 \sum\limits_k A_{ik} b_k \equiv 0 \pmod{\delta_\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = 1, \text{ oppure } \alpha = 2, \ldots, \text{ oppure } \alpha = h)$$

Ogni sistema di numeri interi b primi tra di loro, che soddisfi a uno degli h sistemi (13), ci definisce un iperpiano di riflessione, ossia una riflessione di G. Abbiamo così ricondotta una parte delle nostre ricerche (che è spesso la fondamentale) alla risoluzione dei sistemi (13). Ma la nostra teoria ci dà un aiuto potentissimo per la risoluzione delle (13). Infatti notiamo che per ogni soluzione di (13) è individuata una riflessione di G. Date due tali riflessioni U, V se ne può subito trovare una terza $U^{-1} V U$, e quindi, continuando in modo simile se ne possono trovare infinite altre $V^{-1} U V$, $V^{-1} U^{-1} V U V$, $U^{-1} V^{-1} U^{-1} V U V U$, ecc.

La teoria dei sistemi (13) presenta perciò una notevole analogia (che non è soltanto formale) con la teoria della ***equazione di Pell***, per la quale, com'è noto, basta conoscere la soluzione minima per poter trovare tutte le altre (*).

Immaginando di avere, in un modo o nell'altro, risoluto le equazioni (13), noi avremo determinato tutte le riflessioni di G; queste riflessioni, moltiplicate tra di loro in tutti i modi possibili, genereranno un gruppo G', o coincidente con G, o contenuto in G come sottogruppo invariante. I piani di riflessione trovati divideranno R in tante regioni parziali K_0, K_1, K_2 ...., ciascuna delle quali potrà servire di campo fondamentale a G' (**).

§ 27. — I gruppi lineari e conformi più generali.

Le considerazioni dei due ultimi paragrafi hanno un'importante applicazione al problema di riconoscere se un gruppo lineare o conforme qualsiasi è, o non è pr. dis. Comincieremo dal caso dei gruppi lineari.

Sia G un gruppo p. d. t. i. di collineazioni reali o complesse in uno spazio S, in cui $x_1, x_2, \dots x_n$ siano coordinate omogenee. Come potremo noi riconoscere se il gruppo G opera o non opera in modo

(*) Cfr. DIRICHLET-DEDEKIND, *Teoria dei numeri*. Trad. it. del FAIFOFER. Pag. 142 e seg.

(**) Nel trattato di KLEIN E FRICKE (pag. 501 e seg.) si studiano moltissimi casi particolari, e si trovano numerose citazioni bibliografiche.

pr. dis. sui punti reali e complessi di S, o, ciò che è lo stesso, sulle variabili $\frac{x_i}{x_n}$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$, pensate come variabili complesse?

Indichiamo con ξ_i le coordinate omogenee di iperpiano in S, e con ξ_i^0 le quantità immaginarie coniugate, e consideriamo il sistema di tutte le forme F quadratiche a coefficienti reali o di tutte le forme Hermitiane nelle ξ. Sia al solito Σ uno spazio in cui sono coordinate omogenee i coefficienti (la parte reale e la immaginaria dei coefficienti) delle nostre forme F. Sia R quella regione di Σ, i cui punti sono immagine di forme definite. Il gruppo G diventa in S un gruppo G', che trasforma R in sè stessa, ed è pr. dis. in R (§ 21, teoremi VI e VII, pag. 128). Noi potremo anzi per i risultati del § 25, pag. 157-158, immaginare di aver costruito in R per G un campo fondamentale K_0, e i campi equivalenti K_1, K_2 .... Tra le varietà, che formano il contorno di R c'è la varietà W, luogo dei punti, a cui corrispondono forme uguali al prodotto di due fattori lineari $\Sigma \alpha_i \xi_i$, $\Sigma \alpha_i^0 \xi_i$ $(\Sigma \alpha_i \xi_i, \Sigma \alpha_i^0 \xi_i^0)$ (dove con α_i, α_i^0 indico costanti immaginarie coniugate). Nel primo caso questi due fattori rappresentano, uguagliati a zero, due stelle immaginarie coniugate di iperpiani, ossia in sostanza due punti immaginarii coniugati di S. Nel secondo caso il primo di questi due fattori individua l'altro, e rappresenta una stella immaginaria di iperpiani, ossia, in sostanza, un punto immaginario di S. I punti di W sono dunque in corrispondenza biunivoca e continua con le coppie di punti immaginarii coniugati di S o coi punti immaginarii di S. Dunque: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè G sia pr. dis. in S, pensato come luogo dei suoi punti reali e complessi, è che G' operi in modo pr. dis. sulla varietà* W (che è a $2n-2$ dimensioni).

Supponiamo che un pezzo F_0 a $2n-2$ dimensioni di W faccia parte del contorno di uno dei campi fondamentali K_i, p. es. di K_0. Esisterà allora pure un pezzo F_i a $2n-2$ dimensioni di W, che fa parte del contorno di K_i $(i=1,2,\ldots)$. Sia W' quella porzione di W, che è ricoperta da F_0, F_1, ecc. Evidentemente il gruppo G' sarà pr. dis. in W', in quanto che due punti generici di F_0 non

potranno essere equivalenti rispetto a G': e quindi G sarà pr. dis. in quella parte di S, i cui punti sono immagine dei punti di W.

Viceversa noi ci possiamo chiedere: Se il gruppo G è pr. dis. in S, o in un pezzo di S, ossia se G' è pr. dis. in W, o in una parte di W, accadrà necessariamente che un campo K_i abbia almeno una faccia a $2n - 2$ dimensioni su W? Da una vaga intuizione siamo indotti a rispondere affermativamente a questa domanda, ossia ad enunciare il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè G sia pr. dis. in S, o in una parte di S, è che un pezzo a $2n - 2$ dimensioni di W faccia parte del contorno di K_0.

Questo teorema, che risolverebbe in generale il problema di riconoscere se un gruppo proiettivo generico G p. d. t. i. è, o non è pr. dis., ***non è ancora dimostrato completamente:*** cioè, mentre la condizione enunciata è certo sufficiente come noi abbiamo visto, non si è ancora dimostrato che essa sia necessaria (*). Nel caso dei gruppi kleiniani, questo teorema equivale a un procedimento già usato dal Poincaré; e che per tali gruppi specialmente importanti questa condizione sia realmente necessaria e sufficiente noi dimostreremo con tutto rigore al Capitolo ottavo.

(*) Si noti che, se F è un pezzo a $n - 2$ dimensioni di W, e se nessun pezzo F a $n - 2$ dimensioni di F appartiene a uno stesso campo fondamentale, allora in ogni intorno, *costruito in R*, di un punto A di F penetrano infiniti campi fondamentali. Se invece G è pr. dis. in un pezzo F di W, per ogni punto A di F si può *costruire in W* un intorno, due punti distinti del quale non possono essere equivalenti rispetto a G. Il dimostrare che le condizioni del testo sono necessarie equivale dunque a dimostrare che, se un punto A di W è punto limite di infiniti campi fondamentali, ossia se in ogni intorno di A, *costruito in R*, penetrano infiniti campi fondamentali, allora in ogni intorno di A, *costruito in W*, esistono punti distinti equivalenti rispetto a G. Ora non è dimostrato che: 1. se, per una determinata divisione dello spazio R in campi fondamentali, nell'intorno di A penetrano infiniti campi fondamentali, il gruppo non sia pr. dis. nell'intorno di A *costruito in R*; 2. che, quand'anche in tal senso il gruppo risultasse impropriamente dis., non si potrebbe conchiuderne senz'altro che di conseguenza il gruppo sia pure impropriamente dis. nell'intorno di A *costruito in W*.

quando si convenga di chiamare ***ridotta***, o ***non ridotta*** una forma F, secondo che il punto corrispondente in S è ***ridotto***, o ***non ridotto***.

Quanto abbiamo fin qui detto si applica alle forme ***definite;*** e, nel caso che il gruppo Γ sia il gruppo delle trasformazioni lineari intere omogenee unimodulari a coefficienti interi sulle z, la nostra definizione non è che una semplicissima generalizzazione di quanto si fa nella ordinaria teoria dei numeri. In questa teoria si dice infatti che, se S è un insieme di forme definite, le forme di un insieme K_0, subordinato di S, si possono chiamare ***ridotte***, se K_0 è tale che ogni forma di S sia equivalente a una e in generale a una sola forma di K_0. Anzi la nostra teoria attuale permette di giustificare tale definizione per le forme definite di grado qualsiasi, e di mostrare quanto vi sia di indeterminato in tale definizione, per la indeterminazione che esiste (§ 24, pag. 147) nella scelta del campo fondamentale K_0.

Supponiamo, per fissare le idee, che le trasformazioni di Γ siano a coefficienti reali; e consideriamo tutte le forme F' delle z di uno stesso grado t (che può anche essere uguale a $2s$). Sia S'_1 lo spazio, ove sono coordinate omogenee i coefficienti delle F' (che potrà anche coincidere con S_1). Al gruppo Γ corrisponderà in S'_1 un gruppo proiettivo G'. Se $j_1, j_2, \ldots, j_\tau$ sono un sistema completo di invarianti per le forme F', i cui gradi sono rispettivamente $m_1, m_2, \ldots, m_\tau$, il gruppo G'_1 trasformerà in sè ogni varietà, definita da una o più equazioni $\frac{j_\alpha^{m_1}}{j_1^{m_\alpha}} = \text{cost.}$ $(\alpha = 2, 3, \ldots, \tau)$.

Sia S' una di queste varietà, che supponiamo reale. Siano $I_1, I_2, \ldots, I_h$ invarianti simultanei di una forma F e di una forma F'. Le I saranno funzioni dei coefficienti x di una forma F e dei coefficienti y di una forma F'. ***Potrà darsi*** che in S' esista una regione R' tale che ai gruppi G, G' si possano applicare le considerazioni, che abbiamo esposte nelle prima parte del presente paragrafo. In tal caso noi potremo costruire una teoria ***della riduzione*** delle forme F' corrispondenti ai punti di R', anche se esse ***non sono forme definite***. L'importanza di queste

$$f_1(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = f_2(T^{-1}x_1, \ldots, T^{-1}x_n).$$

Cosicchè, se per certi valori interi ξ_i si ha

$$f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) = m \qquad (m = \text{num. intero}),$$

sarà pure

$$f_2(\eta_1, \ldots, \eta_n) = m,$$

dove le η sono numeri interi definiti dalle $\eta_i = T^{-1}\xi_i$.

Ciò si esprime dicendo che i numeri interi rappresentabili con la f_1 sono quelli stessi, che sono rappresentabili con la f_2, e che dall'una rappresentazione si passa all'altra mediante la trasformazione lineare T. Tutte queste osservazioni giustificano la denominazione sopra introdotta di *forme equivalenti.*

Sorge ora la domanda di riconoscere se due date forme a coefficienti interi sono, o non sono equivalenti, e, in caso affermativo, la questione di riconoscere quale trasformazione lineare T porta l'una nell'altra. Per rispondere a queste domande è sorta la teoria della *riduzione* delle forme: la quale si propone di trovare in un insieme Σ di forme un insieme subordinato Σ', tale che ogni forma di Σ sia equivalente ad una forma di Σ': così che due forme di Σ sieno equivalenti allora e allora soltanto, che esse sieno equivalenti alle stesse forme di Σ'. Questa teoria si presenta nei varii casi di aspetto assai differente: per ragioni di chiarezza noi dovremo svolgere anzitutto alcune considerazioni preliminari.

Siano G e G' due gruppi isomorfi di trasformazioni rispettivamente su n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e su m variabili $y_1, y_2, \ldots, y_m$, che si assumano le une a coordinate in uno spazio S, le altre a coordinate in uno spazio S'. Sia R una regione di S, che ogni trasformazione di G trasforma in sè stessa, e in cui G è pr. dis. Sia R' una regione di S', che G' trasforma in sè stessa. Supporremo:

1. Esiste un sistema Σ di h equazioni

$$\Sigma) \qquad I_i(x_1\, x_2 \ldots x_n,\, y_1\, y_2 \ldots y_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

tali che, se due punti $(x_1 \ldots x_n)$ e $(y_1 \ldots y_m)$ di S e di S' soddisfano a esse, altrettanto avviene dei punti, trasformati del

punto (x) e del punto (y) per due trasformazioni corrispondenti qualsiasi di G e di G'. In altre parole i gruppi G, G' lasciano invariato il sistema di equazioni Σ.

2. Se $(y_1\, y_2 \ldots . y_n)$ è un punto di R', i punti x, che soddisfano alle Σ, riempiono una varietà V, che penetra entro R.

3. Il punto $(y_1, y_2, \ldots ., y_m)$ di R' è completamente determinato, quando si dia il pezzo $\overline{V}$ di V, che penetra in R.

4. Il gruppo G possiede in R una rete di campi fondamentali $K_0, K_1, K_2, \ldots .$

Un punto (x) *di* R *si dirà ridotto, se appartiene al campo* K_0; *ogni punto di* R *sarà equivalente a un punto ridotto, e in generale a uno solo*. Ciò è conseguenza delle prime proprietà dei campi fondamentali.

Un punto (y) *di* R' *si dirà ridotto, se la varietà* V *corrispondente ha qualche punto comune con* K_0. *Ogni punto* (y) *di* R' *è equivalente ad almeno un punto ridotto*. Infatti sia A un punto della corrispondente varietà V, che appartenga a R. Alla od alle trasformazioni di G, che portano A in un punto A' di K_0, corrisponderanno in G' una, o più trasformazioni, che portano (y) in un punto ridotto, perchè la corrispondente varietà V ha almeno il punto A' entro K_0. Non si può affermare però che un punto generico (y) di R' sia equivalente a *un solo* punto ridotto, perchè potrebbe avvenire che un punto ridotto B generico di R' fosse equivalente a punti ridotti distinti. Se p. es. la varietà V, definita da B, oltre che aver punti comuni con K_0, ha qualche punto comune con un altro campo K_i, alla trasformazione di G, che porta K_i in K_0 corrispondono in G' una o più trasformazioni, che portano B in un punto ridotto, che può benissimo essere distinto da B.

Due punti (y) *di* R' *saranno equivalenti rispetto a* G', *allora e allora soltanto che essi individuano lo stesso punto, o lo stesso sistema di punti ridotti.*

Notiamo che l'essere un punto di R o di R' *ridotto*, o *non ridotto* dipende essenzialmente dal campo fondamentale scelto come campo K_0.

Notiamo ancora che potrebbe darsi che coincidessero tanto i gruppi G, G', quanto gli spazii S, S' e che R' fosse una regione di S, distinta dalla R, p. es. che R' fosse la regione formata da quei punti di S, che non appartengono a R. In tal caso le nostre definizioni permettono di dare una teoria della ***riduzione*** tanto nei punti x della regione R, ove G è pr. dis., quanto nella regione complementare R'.

Applichiamo queste idee alla teoria delle forme algebriche o Hermitiane. Sia dato un gruppo Γ di trasformazioni lineari intere omogenee unimodulari sulle variabili $z_1, z_2, \ldots\ldots z_n$ p. d. t. i. Se le trasformazioni di Γ sono a coefficienti reali (complessi) consideriamo tutte le forme F algebriche di grado pari $2s$ in queste variabili (le forme Hermitiane (*) di queste variabili). Sia S_1 lo spazio, in cui sono coordinate omogenee i coefficienti (la parte reale e la parte immaginaria dei coefficienti) delle forme F. Una forma F sarà individuata (tutto al più a meno del segno), quando se ne dia il punto immagine in S_1, e si dia il valore di un suo invariante non assoluto e differente da zero. Se $i_1, i_2, \ldots\ldots i_\tau$ sono un sistema completo di invarianti per le nostre forme, i cui gradi sono rispettivamente $n_1, n_2, \ldots\ldots n_\tau$, tutte le trasformazioni di Γ lascieranno invariante il sistema di quelle forme F, per cui $i_1, i_2, \ldots\ldots i_\tau$ hanno dei valori determinati. Il gruppo G cioè trasformerà in sè stessa ogni varietà di S_1, rappresentata da equazioni del tipo: $\dfrac{i_\varkappa^{n_1}}{i_1^{n_\varkappa}} = \text{cost.} \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots\ldots \tau).$

Sia S una varietà reale di questo tipo, e supponiamo esista una regione R di S, i cui punti sono immagine di forme ***definite***. Al nostro gruppo Γ corrisponderà in S un gruppo G che in R possiede campi fondamentali (§ 25, pag. 158). Noi dunque potremo, usando delle definizioni sopra esposte, costruire una teoria della ***riduzione*** per i punti di R, e quindi per le corrispondenti forme F.

(*) Le forme Hermitiane non sono che forme iperalgebriche, (cioè forme algebriche dipendenti dalle x, x^0, che hanno sempre valori reali) di secondo grado. Noi potremmo considerare anche forme iperalgebriche di grado più elevato. (Cfr. la nota al § 21, pag. 128).

quando si convenga di chiamare *ridotta*, o *non ridotta* una forma F, secondo che il punto corrispondente in S è *ridotto*, o *non ridotto*.

Quanto abbiamo fin qui detto si applica alle forme *definite;* e, nel caso che il gruppo Γ sia il gruppo delle trasformazioni lineari intere omogenee unimodulari a coefficienti interi sulle z, la nostra definizione non è che una semplicissima generalizzazione di quanto si fa nella ordinaria teoria dei numeri. In questa teoria si dice infatti che, se S è un insieme di forme definite, le forme di un insieme K_0, subordinato di S, si possono chiamare *ridotte*, se K_0 è tale che ogni forma di S sia equivalente a una e in generale a una sola forma di K_0. Anzi la nostra teoria attuale permette di giustificare tale definizione per le forme definite di grado qualsiasi, e di mostrare quanto vi sia di indeterminato in tale definizione, per la indeterminazione che esiste (§ 24, pag. 147) nella scelta del campo fondamentale K_0.

Supponiamo, per fissare le idee, che le trasformazioni di Γ siano a coefficienti reali: e consideriamo tutte le forme F' delle z di uno stesso grado t (che può anche essere uguale a $2s$). Sia S'_1 lo spazio, ove sono coordinate omogenee i coefficienti delle F' (che potrà anche coincidere con S_1). Al gruppo Γ corrisponderà in S'_1 un gruppo proiettivo G'. Se $j_1, j_2, \ldots, j_\tau$ sono un sistema completo di invarianti per le forme F', i cui gradi sono rispettivamente $m_1, m_2, \ldots, m_\tau$, il gruppo G'_1 trasformerà in sè ogni varietà, definita da una o più equazioni $\frac{j_\alpha^{m_1}}{j_1^{m_\alpha}} = \text{cost.}$ $(\alpha = 2, 3, \ldots, \tau)$.

Sia S' una di queste varietà, che supponiamo reale. Siano $I_1, I_2, \ldots, I_h$ invarianti simultanei di una forma F e di una forma F'. Le I saranno funzioni dei coefficienti x di una forma F e dei coefficienti y di una forma F'. *Potrà darsi* che in S' esista una regione R' tale che ai gruppi G, G' si possano applicare le considerazioni, che abbiamo esposte nelle prima parte del presente paragrafo. In tal caso noi potremo costruire una teoria *della riduzione* delle forme F' corrispondenti ai punti di R', anche se esse *non sono forme definite*. L'importanza di queste

Notiamo ancora che potrebbe darsi che coincidessero tanto i gruppi G, G', quanto gli spazii S, S' e che R' fosse una regione di S, distinta dalla R, p. es. che R' fosse la regione formata da quei punti di S, che non appartengono a R. In tal caso le nostre definizioni permettono di dare una teoria della ***riduzione*** tanto nei punti (x) della regione R, ove G è pr. dis., quanto nella regione complementare R'.

Applichiamo queste idee alla teoria delle forme algebriche o Hermitiane. Sia dato un gruppo Γ di trasformazioni lineari intere omogenee unimodulari sulle variabili $z_1, z_2, \ldots, z_r$, p. d. t. i. Se le trasformazioni di Γ sono a coefficienti reali (complessi) consideriamo tutte le forme F algebriche di grado pari $2s$ in queste variabili (le forme Hermitiane (*) di queste variabili). Sia S_1 lo spazio, in cui sono coordinate omogenee i coefficienti (la parte reale e la parte immaginaria dei coefficienti) delle forme F. Una forma F sarà individuata (tutto al più a meno del segno), quando se ne dia il punto immagine in S_1, e si dia il valore di un suo invariante non assoluto e differente da zero. Se $i_1, i_2, \ldots, i_\sigma$ sono un sistema completo di invarianti per le nostre forme, i cui gradi sono rispettivamente $n_1, n_2, \ldots, n_\sigma$, tutte le trasformazioni di Γ lascieranno invariante il sistema di quelle forme F, per cui $i_1, i_2, \ldots, i_\sigma$ hanno dei valori determinati. Il gruppo G cioè trasformerà in sè stessa ogni varietà di S_1, rappresentata da equazioni del tipo: $\dfrac{i_\alpha^{n_1}}{i_1^{n_\alpha}} = \text{cost.} \qquad (\alpha = 2, 3, \ldots, \sigma)$.

Sia S una varietà reale di questo tipo, e supponiamo esista una regione R di S, i cui punti sono immagine di forme ***definite***. Al nostro gruppo Γ corrisponderà in S un gruppo G che in R possiede campi fondamentali (§ 25, pag. 158). Noi dunque potremo, usando delle definizioni sopra esposte, costruire una teoria della ***riduzione*** per i punti di R, e quindi per le corrispondenti forme F.

(*) Le forme Hermitiane non sono che forme iperalgebriche, (cioè forme algebriche dipendenti dalle x, x^0, che hanno sempre valori reali) di secondo grado. Noi potremmo considerare anche forme iperalgebriche di grado più elevato. (Cfr. la nota al § 21, pag. 128).

quando si convenga di chiamare *ridotta*, o *non ridotta* una forma F, secondo che il punto corrispondente in S è *ridotto*, o *non ridotto*.

Quanto abbiamo fin qui detto si applica alle forme *definite;* e, nel caso che il gruppo Γ sia il gruppo delle trasformazioni lineari intere omogenee unimodulari a coefficienti interi sulle z, la nostra definizione non è che una semplicissima generalizzazione di quanto si fa nella ordinaria teoria dei numeri. In questa teoria si dice infatti che, se S è un insieme di forme definite, le forme di un insieme K_0, subordinato di S, si possono chiamare *ridotte*, se K_0 è tale che ogni forma di S sia equivalente a una e in generale a una sola forma di K_0. Anzi la nostra teoria attuale permette di giustificare tale definizione per le forme definite di grado qualsiasi, e di mostrare quanto vi sia di indeterminato in tale definizione, per la indeterminazione che esiste (§ 24, pag. 147) nella scelta del campo fondamentale K_0.

Supponiamo, per fissare le idee, che le trasformazioni di Γ siano a coefficienti reali; e consideriamo tutte le forme F' delle z di uno stesso grado t (che può anche essere uguale a $2s$). Sia S'_1 lo spazio, ove sono coordinate omogenee i coefficienti delle F' (che potrà anche coincidere con S_1). Al gruppo Γ corrisponderà in S'_1 un gruppo proiettivo G'. Se $j_1, j_2, \ldots, j_\tau$ sono un sistema completo di invarianti per le forme F', i cui gradi sono rispettivamente $m_1, m_2, \ldots, m_\tau$, il gruppo G'_1 trasformerà in sè ogni varietà, definita da una o più equazioni $\frac{j_\alpha^{m_1}}{j_1^{m_\alpha}} = \text{cost.}$ $(\alpha = 2, 3, \ldots, \tau)$.

Sia S' una di queste varietà, che supponiamo reale. Siano $I_1, I_2, \ldots, I_h$ invarianti simultanei di una forma F e di una forma F'. Le I saranno funzioni dei coefficienti x di una forma F e dei coefficienti y di una forma F'. *Potrà darsi* che in S' esista una regione R' tale che ai gruppi G, G' si possano applicare le considerazioni, che abbiamo esposte nelle prima parte del presente paragrafo. In tal caso noi potremo costruire una teoria *della riduzione* delle forme F' corrispondenti ai punti di R', anche se esse *non sono forme definite.* L'importanza di queste

$\Sigma\, b_{ii}\, z_i^2$, e dimostrare soltanto per le F' ridotte a forma canonica che l'iperpiano corrispondente ha punti comuni con R. Essendo $F' = \Sigma\, b_{ii}\, z_i^2$ indefinita, le b_{ii}, e così le B_{ii} non potranno avere tutte lo stesso segno. Si potranno quindi trovare delle costanti *positive* a_{ii} tali che $\Sigma\, a_{ii}\, B_{ii} = 0$. Il punto di R, immagine della forma definita $\Sigma\, a_{ii}\, z_i^2$, giace sull'iperpiano corrispondente alla nostra forma indefinita. E quindi tale iperpiano attraversa R.

c. d. d.

Tanto basta, perchè risulti senz'altro l'applicabilità dei nostri procedimenti al caso attuale: come esempio, noi completeremo il nostro studio per il caso di $n = 2$, cioè per il caso di forme binarie $\lambda z_1^2 + 2\mu z_1 z_2 + \nu z_2^2$. Lo spazio S è in tal caso il piano, in cui le λ, μ, ν sono coordinate omogenee. Il gruppo G è un gruppo di movimenti in una metrica a curvatura costante negativa, che ha per assoluto la conica C definita dalla $\lambda\nu - \mu^2 = 0$. La regione R è la regione dei punti interni a tale conica: i punti di R sono immagine di forme *definite*. Per costruire in R un campo fondamentale K_0, ricorreremo alla rappresentazione conforme della nostra metrica sul semipiano positivo π di una variabile complessa $x = X + i\,Y$ (§§ 10, 14), rappresentazione che è definita dalla

$$X + i\,Y = -\frac{\mu}{\nu} + i\,\frac{\sqrt{\lambda\nu - \mu^2}}{\nu}. \tag{15}$$

Queste formole si possono facilmente dedurre dalle (25)' del § 14, (pag. 81), o, ciò che in fondo è lo stesso (cfr. loc. cit.), dalle (16)' (16)'' del § 10 (pag. 60). Ponendo infatti in queste ultime formole $n = 3$, $y_1 = X$, $y_2 = Y$, $x_1 = \mu$, $x_2 = \frac{\nu - \lambda}{2}$, $x_3 = -\frac{\nu + \lambda}{2}$, esse si riducono alle precedenti formole (15), mentre l'equazione $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, che definisce l'assoluto nelle notazioni del § 10, diventa appunto la $\lambda\nu - \mu^2 = 0$, che definisce l'assoluto nelle notazioni attuali. Una forma definita $\lambda z_1^2 + 2\mu z_1 z_2 + \nu z_2^2$ ha un punto immagine nella regione R di S: il punto corrispondente di π è per la (15) il punto, in cui la variabile complessa x

è uguale a quella delle radici dell'equazione $\lambda + 2\mu x + \nu x^2 = 0$, che ha positivo il coefficiente della parte immaginaria.

Se ne deduce facilmente che il gruppo G, considerato come gruppo di trasformazioni sui punti x di π, è il gruppo modulare. E dal § 26 (pag. 164) noi sappiamo che la regione definita dalle

$$-\tfrac{1}{2} \leq X \leq \tfrac{1}{2}, \qquad X^2 + Y^2 \geqq 1$$

è un campo fondamentale K_0 di G in π. Potremo dunque chiamare una forma definita $\lambda z_1^2 + 2\mu z_1 z_2 + \nu z_2^2$ *ridotta*, allora e allora soltanto che il suo punto immagine è in K_0, ossia che

$$(16) \qquad |\nu| \geq 2\,|\mu|\,; \qquad |\lambda| \geqq |\nu|\,.$$

Ogni forma definita è equivalente dunque a una, e in generale a una sola forma, per cui siano soddisfatte le (16).

Passiamo ora allo studio delle forme $l z_1^2 + 2 m z_1 z_2 + n z_2^2$ indefinite. L'invariante simultaneo I delle forme

$$\lambda z_1^2 + 2\mu z_1 z_2 + \nu z_2^2, \qquad l z_1^2 + 2 m z_1 z_2 + n z_2^2,$$

è

$$I = \lambda n + l \nu - 2 m \mu\,.$$

L'equazione $I = 0$ rappresenta in S, quando si considerino le l, m, n come quantità fisse, le λ, μ, ν come coordinate correnti, la retta polare del punto (l, m, n) rispetto alla conica assoluto C. A questa retta corrisponde per le (15) in π il cerchio

$$n(X^2 + Y^2) + 2 m X + l = 0.$$

Il quale è quel cerchio che taglia ortogonalmente l'asse delle X, nei due punti, le cui ascisse sono le radici della $nX^2 + 2mX + l = 0$.

La nostra forma sarà *ridotta* allora e allora soltanto che questo cerchio ha qualche punto comune con K_0, ossia allora e allora soltanto che

$$(17) \begin{cases} n \neq 0 & n(n + m + l) \leq 0, \quad \text{oppure} \\ n \neq 0 & n(n - m + l) \leq 0, \quad \text{oppure} \\ n = 0 & |l| \leq |m|\,. \end{cases}$$

Ogni forma indefinita è equivalente ad almeno una forma, per cui sono soddisfatte le (17).

Restringiamoci ora a studiare le forme a coefficienti interi razionali. Dalle (16), (17) si ricava facilmente che esiste soltanto un numero finito di forme ridotte di dato discriminante (*). Ora osserviamo che, se γ è il cerchio immagine di una forma ridotta indefinita W_0, il cerchio γ incontrerà in generale, oltre al triangolo K_0, infiniti altri triangoli fondamentali K_1, K_2, K_3.... Le trasformazioni T che portano uno di questi triangoli nel triangolo K_0, trasformeranno W_0 in nuove forme ridotte W_1, W_2, W_3.... che hanno tutte lo stesso discriminante di W_0. Ma, poichè le forme ridotte di dato discriminante sono in numero finito, queste forme si debbono ridurre a un numero *finito* di forme distinte, che si diranno costituire un *periodo* di forme ridotte. Tra le trasformazioni T ne esisteranno perciò infinite, che portano W_0 in sè stessa; e che costituiscono il gruppo aritmetico riproduttore di W_0. Ecco così ritrovati i teoremi fondamentali di Gauss della teoria delle forme binarie a coefficienti interi razionali.

In modo completamente analogo si possono studiare le forme Hermitiane binarie

$$a\, z_1 z_1^0 + (b + i\, c)\, z_1 z_2^0 + (b - i\, c)\, z_1^0 z_2 + d\, z_2 z_2^0,$$

e stabilire una teoria della riduzione rispetto al gruppo Γ delle trasformazioni lineari intere omogenee (a modulo uguale a 1 o a i) sulle z_1, z_2, i cui coefficienti sono interi di Gauss, ossia sono numeri del tipo: $\alpha + i\beta$, dove α, β sono interi razionali.

In questo caso S è lo spazio a tre dimensioni, in cui a, b, c, d sono coordinate omogenee, e in cui è definita una metrica iper-

(*) Infatti, se p. es. si tratta di forme definite, e $\lambda\nu - \mu^2 = D > 0$, dalle (16) si trae successivamente $D = \lambda\nu - \mu^2 \geqq \nu^2 - \mu^2 \geqq \nu^2 - \frac{\nu^2}{4} = \frac{3}{4}\nu^2$. Dunque l'intero ν e, per la prima delle (16), anche l'intero μ può avere soltanto un numero finito di valori. Infatti da queste formole si deduce che $|\mu| \leq \frac{1}{2}|\nu| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{D}$. Altrettanto avverrà anche di $\lambda = \frac{D + \mu^2}{\nu}$.

In modo affatto analogo si tratta il caso di forme indefinite.

bolica, il cui assoluto è la quadrica $a\,d - b^2 - c^2 = 0$. La regione R è la regione interna a questa quadrica, e si può rappresentare su un semispazio euclideo π, in guisa che la nostra metrica iperbolica sia conformemente rappresentata in π.

Applicando i nostri procedimenti precedenti, troveremmo facilmente che una forma ha per immagine in S un punto, che appartiene a R, se la forma è definita, ed ha rispetto alla quadrica assoluto un piano polare intersecante R, se la forma è indefinita. Troveremmo pure che in π una forma definita ha per immagine un punto, una forma indefinita ha per immagine una semisfera, che taglia ortogonalmente il piano limite di π.

Il gruppo G è il gruppo di Picard, per cui noi abbiamo già trovato (§ 26, pag. 167) un campo fondamentale K_0. Noi potremmo dunque senz'altro dedurne una teoria ***della riduzione*** per le nostre forme.

Preferiamo dare al metodo altra forma, che è estendibile pure a forme Hermitiane in n variabili, e di cui mostreremo anche altre applicazioni.

Al gruppo Γ sulle z_1, z_2 corrisponde sulla variabile complessa $x = \frac{z_1}{z_2}$ il gruppo di Picard. Una forma Hermitiana, uguagliata a zero, rappresenta sul piano α della x un cerchio reale, o immaginario, secondo che la forma è indefinita, o definita.

Se una trasformazione di Γ porta una forma F in una forma F_1, la corrispondente trasformazione del gruppo di Picard porta il cerchio $F = 0$ nel cerchio $F_1 = 0$. Se ora noi consideriamo un semispazio euclideo π, che abbia come piano limite il piano α della variabile complessa x, è ben noto che noi possiamo immaginare una metrica a curvatura costante, iperbolica, rappresentata conformemente in π, in guisa che ai movimenti in tale metrica corrispondano in π trasformazioni conformi, che portano un cerchio o una sfera in un altro cerchio, o in un'altra sfera e che la corrispondente trasformazione indotta sul piano α della variabile complessa x sia una trasformazione lineare sulla variabile x. E viceversa.

In particolare il gruppo di Picard individua un gruppo di movimenti nella nostra metrica.

Sia F una delle nostre forme Hermitiane definite: per il cerchio $F = 0$ passa una e una sola sfera di raggio nullo, definita da un'equazione a coefficienti reali, che abbia il centro O in π. E il punto O sarà l'unico punto reale di detta sfera. Se noi assumiamo in π il punto O come punto immagine della forma F, è ben evidente, per quanto abbiamo detto, che a una trasformazione di Γ che porti F in una forma F_1 corrisponde nella nostra metrica un movimento che porta il punto immagine di F nel punto immagine di F_1.

Sia invece F una delle nostre forme Hermitiane indefinite: noi assumeremo come semisfera immagine di F nel semispazio π quella semisfera che taglia ortogonalmente il piano della x lungo il cerchio $F = 0$. A una trasformazione di Γ, che porti F in una forma F_1, corrisponde un movimento nella nostra metrica che porta la semisfera immagine di F nella semisfera immagine di F_1. Siano X, Y, Z coordinate cartesiane ortogonali in π, tali che $x = X + iY$; un poliedro fondamentale K_0 del nostro gruppo in K_0 è p. es. (§ 26, pag. 167) il poliedro limitato dai piani $X = \frac{1}{2}$, $Y=0$, $Y = X$, e dalla sfera $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Noi potremo allora chiamare ***ridotte*** le forme definite, il cui punto immagine appartiene a K_0, e le forme indefinite, la cui sfera immagine ha qualche punto comune con K_0.

E, con ragionamenti affatto simili a quelli svolti per le forme quadratiche, troveremmo che:

Le forme ridotte Hermitiane di dato discriminante, i cui coefficienti sono interi di Gauss, sono in numero finito. Ogni forma definita generica è equivalente a una sola forma ridotta; ogni forma indefinita è equivalente a un numero finito di forme ridotte.

Per ogni forma F Hermitiana indefinita, i cui coefficienti sono interi di Gauss, esistono infinite trasformazioni di Γ, che trasformano F in sè stessa.

Il metodo, che qui sopra abbiamo esposto, è suscettibile di applicazione anche alle forme di Dirichlet, cioè alle forme $F = (a + i\,b)\,z_1^2 + 2\,(c + i\,d)\,z_1\,z_2 + (h + i\,k)\,z_2^2$. Ogni tal forma F definisce, quando venga uguagliata a zero, due punti A, B del piano della variabile $x = \dfrac{z_1}{z_2}$. E se noi diamo il discriminante di F, e quel cerchio di π, che incontra ortogonalmente nei punti A, B il piano della x, avremo individuata la forma F (a meno del segno). Noi potremo quindi assumere tale cerchio come cerchio immagine della F. Ed è poi ben evidente, che se una trasformazione del gruppo Γ sulle variabili z_1, z_2 porta F in una forma F_1, il corrispondente movimento non euclideo porterà il cerchio immagine di F nel cerchio immagine di F_1. Potremo poi chiamare ***ridotta*** una delle nostre forme F, se il suo cerchio immagine ha punti comuni con K_0: e ancora è vero che ogni forma F è equivalente ad almeno una forma ridotta. Il lettore troverà un amplissimo svolgimento di questi studii particolari nel trattato di Klein e Fricke (vol. I, pag. 448-501).

Capitolo Ottavo. — **I gruppi fuchsiani e kleiniani.**

§ 30. — Proprietà fondamentali.

Nel § 22 (pag. 137) noi abbiamo già parlato dei gruppi fuchsiani e kleiniani: riprenderemo ora con maggiori particolari lo studio di questi gruppi, di speciale importanza, e continueremo a usare le notazioni introdotte al § 22.

Noi abbiamo in sostanza al § 22 definiti i gruppi fuchsiani come i gruppi p. d. t. i. di trasformazioni lineari su una variabile $x = \xi + i\eta$, che trasformano in sè stesso un cerchio o una retta *reale* del piano π della variabile complessa x, e trasformano in sè stessa ciascuna delle regioni, in cui questa retta, o questo cerchio dividono π.

Accanto a essi sono pure da ricordarsi i gruppi di trasformazioni lineari sulla variabile complessa x, che trasformano in sè un cerchio C immaginario, ma che pure è definibile con una

equazione sulle ξ, η a coefficienti reali. Se noi poniamo $x = \frac{x_1}{x_2}$, evidentemente ogni tale cerchio C si può definire, ponendo uguale a zero una forma Hermitiana *definita* F delle x_1, x_2, e viceversa. Ora, se $x' = \frac{\alpha_i x + \beta_i}{\gamma_i x + \delta_i}$ $(i = 1, 2, \ldots.)$ sono le trasformazioni di G, e se, come possiamo supporre $\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1$, il gruppo G è isomorfo al gruppo G' delle

$$x'_1 = \pm (\alpha_i x_1 + \beta_i x_2) \qquad x'_2 = \pm (\gamma_i x_1 + \delta_i x_2),$$

il quale evidentemente deve trasformare la forma F in sè stessa. Poichè F è definita, ***il gruppo** G', **e quindi anche il gruppo** G **sono composti di un numero finito di trasformazioni*** (§ 23, pag. 142).

Viceversa ogni gruppo G discontinuo finito di trasformazioni lineari $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ sulla x trasforma in sè stesso un cerchio C di π, immaginario, ma rappresentabile con un'equazione a coefficienti reali sulle ξ, η. Infatti, posto $x = \frac{x_1}{x_2}$, il gruppo G è isomorfo al gruppo G', generato dalle

$$x'_1 = \pm (\alpha x_1 + \beta x_2), \qquad x'_2 = \pm (\gamma x_1 + \delta x_2).$$

Se A è una forma Hermitiana definita delle x_1, x_2 e A', A'',.... sono le forme trasformate di A mediante le operazioni di G', il gruppo G' trasforma in sè stessa la forma Hermitiana definita $F = A + A' + A'' + \ldots.$ L'equazione $F = 0$, (che, come dicemmo, equivale a un'equazione a coefficienti reali sulle ξ, η) rappresenta in π un cerchio C immaginario, che il gruppo G trasforma evidentemente in sè stesso.

c. d. d.

Sia dunque G uno dei nostri gruppi; con una trasformazione lineare sulla x potremo sempre ridurci al caso che il cerchio C sia il cerchio $x x_0 + 4 = 0$, ossia $\xi^2 + \eta^2 + 4 = 0$. Le equazioni (12), (13) del § 10 (pag. 53) dove si ponga $n = 3$, $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$, $p = \xi^2 + \eta^2$ danno una rappresentazione ***conforme e biunivoca*** tra i punti di π e i punti di una sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \qquad (J)$$

di uno spazio euclideo, in cui x_1, x_2, x_3 sono coordinate cartesiane ortogonali. Se noi non consideriamo come distinti punti diametralmente opposti di (J), la metrica vigente su tale sfera coincide con la metrica di un piano q ellittico, i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con le coppie di punti di π, di cui l'uno è il trasformato dell'altro nell'inversione per raggi vettori reciproci definita da C. Ai movimenti di (J) in sè stessa corrispondono movimenti in q e viceversa; cosicchè (§ 11, pag. 63) ai movimenti di J in sè stessa corrispondono quelle trasformazioni conformi di π, che mutano C in sè stesso, ossia quelle trasformazioni lineari sulla x, che lasciano invariante il cerchio C.

Per ognuno dei nostri gruppi G, ossia ***per ogni gruppo G discontinuo finito di trasformazioni lineari sulla x possiamo stabilire una rappresentazione conforme di π su una sfera euclidea J, tale che al nostro gruppo G corrisponda un gruppo di movimenti della sfera J in sè stessa.***

Lo studio dei nostri gruppi G equivale dunque allo studio dei gruppi p. d. t. i. di movimenti della sfera euclidea in sè stessa (cfr. più avanti al § 34).

Tra la classe dei gruppi di trasformazioni lineari sulla x, che lasciano fisso un cerchio *reale* di π, e quella dei gruppi che lasciano fisso un cerchio *immaginario*, esiste una classe intermedia: la classe dei gruppi G che lasciano fisso un cerchio di raggio nullo, ossia un punto di π. Sia G un tale gruppo e sia A il punto, che G lascia fisso. Una trasformazione lineare, che porti A nel punto $x = \infty$, trasformerà G in un gruppo simile G', le cui trasformazioni, dovendo lasciar fisso il punto $x = \infty$, saranno del tipo $x' = \alpha x + \beta$. Se, come al solito, la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di x si interpretano come coordinate cartesiane ortogonali in π, questo gruppo G' sarà quindi un sottogruppo del *gruppo continuo* formato da tutti i movimenti e tutte le similitudini euclidee. Se per tutte le trasformazioni del gruppo si ha $|\alpha| = 1$, allora questo gruppo non contiene nè trasformazioni iperboliche, nè lossodromiche, e di-

venta un sottogruppo del gruppo dei movimenti euclidei. Noi determineremo al § 34 tutti questi gruppi. Ma nel presente paragrafo e nei seguenti §§ 31-33 non ci occuperemo invece in modo esplicito dei gruppi che si possono considerare come gruppi di movimenti sulla sfera, o sul piano euclideo; e ciò perchè gli stessi metodi, che applicheremo allo studio dei gruppi fuchsiani, valgono anche in questi casi, e anzi diventano per essi assai più elementari.

Dal § 14 sappiamo che le trasformazioni di un gruppo fuchsiano possono essere ellittiche, paraboliche o iperboliche: quelle di un gruppo kleiniano possono essere ellittiche, paraboliche, iperboliche o lossodromiche (ellittico-iperboliche). Una trasformazione ellittica T di un gruppo G fuchsiano o kleiniano è una trasformazione del tipo: (cfr. § 14, pag. 86)

$$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta} = e^{2k\pi i}\frac{x-\alpha}{x-\beta} \qquad (k = \text{cost. reale}).$$

La trasformazione T^ρ (ρ intero qualunque), che appartiene pure a G, è data evidentemente dalla

$$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta} = e^{2k\rho\pi i}\frac{x-\alpha}{x-\beta}.$$

Essa è infinitesima allora e allora soltanto che $k\rho$ differisce da un numero intero di una quantità infinitesima non nulla. Ma, poichè per definizione G non contiene trasformazioni infinitesime, noi possiamo concluderne che qualunque sia l'intero ρ, la quantità $k\rho$ o è essa stessa un numero intero, o differisce da un numero intero di una quantità ε non infinitesima: cioè di una quantità ε, maggiore in valore assoluto di una certa costante positiva non nulla. Per note proprietà dei numeri irrazionali, ciò non avverrebbe se k fosse irrazionale; possiamo dunque asserire che k è un numero razionale $\frac{m}{n}$ (m, n interi primi tra loro). Possiamo naturalmente supporre m, n positivi ed $m < n$, perchè, aggiungendo o sottraendo da k dei numeri interi, la trasformazione T non cambia. Noi possiamo ora trovare due numeri

interi μ, ν tali che $m\mu = n\nu + 1$. La trasformazione $U = T^\mu$ sarà definita dalla

$$\frac{x' - \alpha}{x' - \beta} = e^{2\pi i \frac{m\mu}{n}} \frac{x - \alpha}{x - \beta},$$

o, ciò che è lo stesso, dalla

$$\frac{x' - \alpha}{x' - \beta} = e^{2\pi i \frac{1}{n}} \frac{x - \alpha}{x - \beta}.$$

Sarà dunque $T = U^m$. Il gruppo ciclico Γ generato dalla $U = T^\mu$ è evidentemente un sottogruppo del gruppo ciclico γ generato da T. Ma, poichè $T = U^m$, γ è un sottogruppo di Γ: i due gruppi γ, Γ devono dunque coincidere, ossia le T, U generano lo stesso gruppo ciclico. Concludendo, i gruppi ciclici di trasformazioni ellittiche contenuti in un gruppo G fuchsiano o kleiniano sono generati da trasformazioni U del tipo precedente, dove n è un intero. Evidentemente la U ha il periodo n; vale a dire n è il minimo intero, per cui $U^n = 1$, cosicchè (§ 3, pag. 10) si ha $U^s = U^r$ allora, e allora soltanto che $s \equiv r \pmod{n}$. Se noi pensiamo il gruppo fuchsiano o kleiniano G come gruppo di movimenti (§§ 14, 22) in uno spazio di Bólyai a 2 o a 3 dimensioni, la U lascia fisso, come sappiamo, rispettivamente un punto, o una retta reale nella metrica corrispondente, ed è una rotazione di ampiezza $\frac{2\pi}{n}$ attorno a questo punto o a questa retta.

Dal § 14 sappiamo che un gruppo G di trasformazioni lineari, che trasforma in sè stesso un cerchio C reale di π, non contiene trasformazioni lossodromiche. Noi completeremo questo risultato dimostrando che:

Se G è un gruppo di trasformazioni lineari sulla variabile complessa x, che non contiene trasformazioni lossodromiche, allora esso

α) o trasforma in sè stesso un cerchio reale, o immaginario del piano π della variabile x, e si può considerare come un gruppo di movimenti in una metrica a curvatura costante non nulla;

β) o è un gruppo simile a un gruppo G' di movimenti euclidei;

γ) *o è un gruppo simile a un gruppo G' formato di pure omotetie e traslazioni euclidee.* (Il caso (γ) sembra non essere stato finora notato).

Viceversa ogni gruppo, che goda di una delle proprietà (α), (β), (γ) *non contiene trasformazioni lossodromiche.*

Comincieremo dalla prima parte di questo teorema.

Se G è un gruppo ciclico (generato per ipotesi da una trasformazione non lossodromica), la nostra asserzione è evidente, perchè ogni trasformazione non lossodromica è simile a una trasformazione $x' = k\,x + h$ (k, h costanti, k reale), oppure a una trasformazione $x' = e^{i\theta}\,x + h$ (θ, h reali) e trasforma quindi in sè infiniti cerchi (o rette).

Supponiamo ora dapprima che esista un punto A, lasciato fisso da tutte le trasformazioni di G; noi potremo (trasformando G con una opportuna trasformazione lineare V sulla x) supporre che esso sia il punto $x = \infty$. Le trasformazioni di G del gruppo trasformato G' saranno del tipo $x' = \alpha\,x + \beta$. Poichè nessuna trasformazione del gruppo è lossodromica, i coefficienti α di queste trasformazioni o sono in modulo uguali alla unità, oppure sono reali positivi. Se è sempre $|\,\alpha\,| = 1$, il gruppo evidentemente è un gruppo di movimenti euclidei. Se non è sempre $|\,\alpha\,| = 1$, il gruppo conterrà almeno una trasformazione iperbolica T. Il gruppo non potrà contenere alcuna trasformazione ellittica U, (lasciante fisso il punto $x = \infty$), perchè altrimenti conterrebbe anche la trasformazione lossodromica $T\,U$. Le trasformazioni del gruppo sono quindi tutte del tipo: $x' = \alpha\,x + \beta$, dove α è una costante reale positiva e sono quindi o traslazioni (se $\alpha = 1$), o pure omotetie euclidee (se $\alpha \neq 1$). Il nostro gruppo G godrà dunque o della proprietà (β) o della proprietà (α).

Esclusi questi gruppi, potremo ora supporre che nessun punto di π sia lasciato fisso da tutte le trasformazioni di G. Distinguiamo più casi:

1. G contiene una trasformazione ellittica non identica T.

Mutando G in un gruppo simile G' con una opportuna trasformazione lineare sulla x, potremo (§ 14, pag. 86) ottenere che la trasformazione di G', corrispondente a T, e che indicheremo ancora con T, sia del tipo: $x' = e^{i\theta} x$ ($\theta =$ cost. reale).

Io dico che *se* $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ $(\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$ *è una qualsiasi trasformazione* U *di* G', *allora* $\alpha = \delta_0$. Infatti U non è lossodromica per ipotesi, e quindi $\alpha + \delta$ è reale. Anche la trasformazione $T\,U$ di G' non è lossodromica. E, poichè $T\,U$ è definita dalla $x' = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}(\alpha x + \beta)}{e^{-\frac{i\theta}{2}}(\gamma x + \delta)}$, anche $e^{\frac{i\theta}{2}}\alpha + e^{-\frac{i\theta}{2}}\delta$ è reale. Dal fatto che $\alpha + \delta$, $e^{\frac{i\theta}{2}}\alpha + e^{-\frac{i\theta}{2}}\delta$ sono reali si trae subito che $\alpha = \delta_0$.

Osservo di più che, se uno dei coefficienti β, γ è nullo, allora, poichè $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, i coefficienti α e δ sono differenti da zero. Però il coefficiente β delle trasformazioni di G' non può essere sempre nullo, perchè altrimenti, contrariamente alla nostra ipotesi, G' lascierebbe fisso il punto $x = 0$. Nè può essere sempre nullo il coefficiente γ, perchè G' lascierebbe sempre fisso il punto $x = \infty$. Io dico che esiste una trasformazione di G', per cui ambedue questi coefficienti sono differenti da zero. Infatti esistono, per quanto dicemmo, almeno due trasformazioni, distinte o no, di G'

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1), \qquad x' = \frac{\alpha' x + \beta'}{\gamma' x + \delta'} \quad (\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1),$$

tali che $\beta \neq 0$, $\gamma' \neq 0$. Se p. es. $\gamma \neq 0$, o $\beta' \neq 0$, la prima, o la seconda di queste trasformazioni godrebbero della proprietà voluta. Se invece $\gamma = \beta' = 0$, allora, come sappiamo, $\alpha = \delta_0 \neq 0$, $\alpha' = \delta'_0 \neq 0$; e la trasformazione

$$x' = \frac{(\alpha\alpha' + \beta\gamma')\,x + \beta\delta'}{\delta\gamma' x + \delta\delta'},$$

che è prodotto delle due trasformazioni considerate, gode appunto della proprietà voluta. Sia dunque W una trasformazione $x' = \frac{p\,x + q}{r\,x + s}$ $(p\,s - q\,r = 1)$ di G' per cui $q \neq 0$, $r \neq 0$, $p = s_0$.

Sarà $q r = p s - 1 = p p_0 - 1$. Perciò $q r$ è una quantità reale non nulla. Se $q r > 0$, esisterà una costante reale non nulla k tale che $r k$, $\frac{q}{k}$ siano complesse coniugate. Sostituendo la variabile $k x$ al posto di x, il gruppo G' sarà trasformato in un gruppo simile, che indicheremo ancora con G'; la T sarà trasformata in una trasformazione T' che sarà ancora definita dalla $x' = e^{i\theta} x$; la W sarà trasformata nella trasformazione W'

$$x' = \frac{p' x + q'}{r' x + s'} \quad (p' s' - q' r' = 1) \text{ dove } q' = r'_0 \neq 0 \text{ (e } p' = s'_0)$$

Sia ora V un'altra trasformazione di G' definita dalla $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ $(\alpha \delta - \beta \gamma = 1)$. Poichè G' contiene T', sappiamo che $\alpha = \delta_0$. La trasformazione $W' V$ di G' è definita dalla

$$x' = \frac{(p' \alpha + q' \gamma) x + (p' \beta + q' \delta)}{(r' \alpha + s' \gamma) x + (r' \beta + s' \delta)}.$$

Sarà dunque anche $(p' \alpha + q' \gamma) = (r' \beta + s' \delta)_0 = r'_0 \beta_0 + s'_0 \delta_0$. Poichè $p' = s'_0$, $\alpha = \delta_0$, $q' = r'_0 \neq 0$, se ne trae $\gamma = \beta_0$.

Dunque ogni trasformazione di G' è del tipo $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\beta_0 x + \alpha_0}$ $(\alpha \alpha_0 - \beta \beta_0 = 1)$, e trasforma perciò in sè stesso il cerchio $x x_0 = 1$. Il gruppo G iniziale, che è simile a G', trasformerà in sè stesso un cerchio reale di π, e godrà della proprietà (α). Se invece $q r < 0$, si dimostra in modo simile che G lascia fisso un cerchio *immaginario* di π, e gode ancora della proprietà (α).

2. G contiene almeno una trasformazione iperbolica T; mutando il gruppo in un gruppo simile G', potremo supporre che G' contenga una trasformazione iperbolica T', definita (§ 14, pag. 86) da un'equazione $x' = h x$ (h = cost. reale positiva). Sia $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ $(\alpha \delta - \beta \gamma = 1)$ una qualsiasi trasformazione U di G'. Poichè U non è lossodromica, $\alpha + \delta$ è reale. Poichè anche la $U T'$ che è definita dalla $x' = \dfrac{\alpha \sqrt{h}\, x + \frac{\beta}{\sqrt{h}}}{\gamma \sqrt{h}\, x + \frac{\delta}{\sqrt{h}}}$ non è lossodro-

mica, $\alpha \sqrt{h} + \frac{\delta}{\sqrt{h}}$ sarà reale. E quindi tanto α che δ sono reali. Come nel caso precedente, vediamo che esiste in G' una trasformazione W definita dalla $x' = \frac{p\,x + q}{r\,x + s}$ $(p\,s - q\,r = 1)$, tale che $q \neq 0$, $r \neq 0$. Per quanto abbiamo detto, p ed s saranno reali. E si trova c. s., che (trasformando G' con una trasformazione $x' = k\,x$, dove k è un'opportuna costante) si può supporre che q, r siano quantità reali. Ora G' contiene anche la $W\,V$, che è definita dalla $x' = \frac{(p\,\alpha + q\,\gamma)\,x + (p\,\beta + q\,\delta)}{(r\,\alpha + s\,\gamma)\,x + (r\,\beta + s\,\delta)}$. Per quanto sappiamo $p\,\alpha + q\,\gamma$, $r\,\beta + s\,\delta$ saranno reali. Poichè $\alpha, \delta, r, s, p, q$ sono reali e $q \neq 0$, $r \neq 0$, anche β e γ saranno reali. Quindi ogni trasformazione U di G' ha coefficienti reali. G' trasformerà in sè stesso l'asse reale di π; e il gruppo simile G trasformerà in sè stesso un cerchio, o una retta reale di π, e godrà della proprietà (α).

3. G contiene tutte trasformazioni paraboliche. Poichè per ipotesi nessun punto di π è lasciato fisso da tutte le trasformazioni di G, si potranno trovare in G due trasformazioni U, V paraboliche, distinte dall'identità, in guisa che, se $x = a$ e $x = b$ sono i punti di π lasciati fissi rispettivamente da U e da V, sia $a \neq b$. Con una trasformazione lineare sulle x, portiamo il punto $x = a$ nel punto $x = 0$, il punto $x = b$ nel punto $x = \infty$. Le U, V saranno rispettivamente definite da equazioni del tipo $x' = \frac{x}{\gamma\,x + 1}$, $x' = x + \beta$, dove $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, perchè U, V sono distinte dall'identità. La trasformazione $U\,V^m$ è definita dalla $x' = \frac{x + m\,\beta}{\gamma\,x + \gamma\,\beta\,m + 1}$, e quindi non può essere parabolica per ogni valore di m; perchè altrimenti sarebbe (per ogni valore dell'intero m) $2 + m\,\gamma\,\beta = \pm 2$: ciò che è assurdo, perchè $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Quest'ultimo caso non può dunque avvenire.

Passiamo ora a studiare le proprietà più notevoli dei campi fondamentali dei gruppi fuchsiani e kleiniani. Cominciamo dal caso più semplice dei gruppi fuchsiani. Consideriamo un gruppo fuchsiano G come gruppo di movimenti su un piano di Bólyai.

Noi sappiamo dal § 25 (pag. 155) che si potrà per esso costruire un campo fondamentale, limitato da linee ciascuna delle quali è luogo dei punti equidistanti da due punti C_0, C_1. Ma il luogo dei punti equidistanti da due punti dati è, anche nel piano di Bólyai, una geodetica. Si potrà dunque limitare un campo fondamentale di G sul piano di Bólyai mediante geodetiche. Bisogna soltanto osservare che un campo fondamentale del piano di Bólyai può anche estendersi all'infinito: vale a dire che, se noi ricorriamo all'immagine geodetica del piano di Bólyai sulla regione R interna a una conica reale Q, può avvenire che il campo fondamentale di G in R o abbia dei vertici su Q, o abbia anche tra i suoi lati qualche pezzo di Q.

Ora, se π è il piano della variabile complessa x, su cui opera G, e se C è il cerchio o la retta *limite* (e cioè il cerchio o la retta trasformati da G in sè stessi), questo piano π è diviso da C in due regioni R_1, R_2, su ognuna delle quali noi possiamo rappresentare conformemente il piano di Bólyai: le geodetiche saranno rappresentate dai cerchi, che tagliano C ad angolo retto. Noi potremo quindi in R_1 (in R_2) costruire un campo fondamentale K_1 (K_2) per G, il quale sarà limitato da cerchi o da rette ortogonali a C. Se però il campo fondamentale di G si estendeva all'infinito sul piano di Bólyai, allora, poichè nella nostra rappresentazione i punti di C corrispondono biunivocamente ai punti di Q, il campo K_1, K_2 sarà inoltre limitato da uno o più lati posti sul cerchio o sulla retta limite C. Ma sappiamo che due punti uno di R_1 e uno di R_2, che corrispondono a uno stesso punto del piano di Bólyai, sono (§ 10, pag. 56) trasformati l'uno dell'altro mediante l'inversione per raggi vettori reciproci definita dal cerchio C su π o, se C è una retta, mediante la simmetria definita da questa retta; quindi *K_2 si deduce da K_1 mediante questa inversione o simmetria, e i vertici, o i lati, che K_1 (K_2) ha eventualmente su C sono comuni anche a K_2 (K_1).* Nel caso dunque che K_1 o K_2 avessero lati su C, i due poligoni K_1, K_2, considerati insieme, formano un unico poligono $K_1 + K_2$, il cui

contorno è *tutto* formato da rette o cerchi ortogonali a C, e che può *servire di campo fondamentale per G in tutto il piano π della variabile complessa x* (tanto in R_1, che in R_2). I poligoni trasformati di K mediante le trasformazioni di G riempiono tutto il piano π; e soltanto su C possono esistere dei punti eccezionali, che siano punti limiti di un insieme di punti equivalenti.

Se invece K_1 e K_2 non hanno alcun lato su C, noi dovremo considerarli separatamente come campi fondamentali di G in R_1 e in R_2; nessun punto di C potrà essere interno a un campo fondamentale; e in un intorno di un punto *qualsiasi* di C penetrano infiniti campi equivalenti. La linea C è composta di punti *tutti* singolari per G.

Passiamo ora ai gruppi kleiniani. Teoremi più volte citati ci dicono che un tal gruppo G si può considerare come un gruppo proiettivo nella regione R di uno spazio S, che è interna a una quadrica Q reale non rigata, il quale trasforma in sè Q. In R esso possiede un campo fondamentale K. Se noi supponiamo in R rappresentato geodeticamente uno spazio di Bólyai, il contorno di K sarà formato da superficie, ciascuna delle quali è il luogo dei punti equidistanti da due punti A, B. Queste superficie sono dunque piani normali alla retta $A B$. Se poi K ha faccie anche all'infinito, esso avrà per contorno anche uno o più pezzi di Q. *In questo caso e in questo caso soltanto G può operare in modo pr. dis. in una regione di Q* (§ 27, pag. 172).

Per dimostrare con rigore quest'ultima affermazione, proveremo che:

1. *Se un punto B di Q è punto limite di infiniti poliedri fondamentali normali $K_1, K_2, \ldots.$ per il gruppo G in R, esso è anche punto limite di infiniti punti, equivalenti a un punto qualunque C, interno a R.*

Osserviamo infatti che, se A è il centro di un poliedro fondamentale normale K, una faccia di K appartiene al piano σ luogo dei punti equidistanti da A e da un punto A', equivalente ad A.

I punti interni a K hanno (per definizione di campi normali) una distanza da A minore della loro distanza da A', e perciò giacciono da una stessa banda di σ. In altre parole, ***se* σ *è il piano di una faccia di un campo normale* K, *allora* K *giace tutto da una stessa parte di* σ.** Quindi ogni poliedro fondamentale è convesso, e ***un segmento di geodetica che congiunge due punti interni a un tale poliedro è formato tutto di punti interni al poliedro.*** Supponiamo ora (ciò che non diminuisce la generalità) che la quadrica Q dello spazio euclideo S rappresentativo sia una sfera di raggio 1; e sia Q' una sfera di raggio $\varepsilon < 1$, concentrica a Q, e interna a Q. Ogni punto interno o sul contorno di Q' appartiene a un numero finito di poliedri fondamentali; ed esiste al più un numero finito di tali poliedri, che abbiano ***almeno*** un punto comune con Q', perchè altrimenti esisterebbe in Q' un punto limite di infiniti poliedri. Siano ora $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots.$ infiniti numeri positivi crescenti, tali che $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 1$. Costruiamo le sfere $Q'_1, Q'_2, Q'_3 \ldots.$ concentriche a Q, i cui raggi ***euclidei*** siano rispettivamente $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots..$ Dei poliedri fondamentali normali, che hanno per limite il punto B di Q, soltanto un numero finito può avere dei punti interni o sul contorno di Q'_i (dove i è un intero qualunque). Gli altri poliedri sono tutti esterni a Q'_i. Il segmento di geodetica (retta) che congiunge due punti interni a un poliedro affatto esterno a Q'_i, giace tutto entro questo poliedro, e perciò è interno a Q, ma esterno a Q'_i. La sua lunghezza ***euclidea*** è quindi inferiore a $2\sqrt{1-\varepsilon_i^2}$. Dunque la massima distanza ***euclidea*** di due punti di uno dei poliedri K_n tende a ***zero,*** quando n tende a infinito, ossia quando K_n si avvicina al punto B. Dunque, mentre i nostri poliedri si avvicinano a B, le loro dimensioni (dal punto di vista euclideo) impiccioliscono *in tutti i versi;* preso quindi un intorno β piccolo a piacere del punto B, esisterà un numero m così grande che, per $n > m$, tutti i poliedri K_n sono interni a β. Sia C ora un punto qualunque interno a R. In ciascuno di questi poliedri K_n esiste un punto

equivalente a C. Dunque in ogni intorno β di B esistono infiniti punti equivalenti a C.

2. ***Se in un pezzo w del contorno di Q non esistono punti distinti equivalenti, nessun punto di w può essere un punto limite di infiniti poliedri fondamentali.***

Sia infatti B un punto di w; sia g un piccolo cerchietto, interno a w, della sfera Q, che contiene B all'interno, e siano g', g''.... i cerchi trasformati di g. Io dico che il cerchio g non può tagliare alcuno dei cerchi g', g''.... Se infatti E fosse un punto interno tanto a g, che a g', la trasformazione T di G, che porta g' in g, porterebbe il punto E in un altro punto E', interno a g, ed equivalente ad E. Per l'ipotesi fatta E' coinciderebbe con E. Tutti i punti interni a g ed a g' sarebbero dunque punti fissi per la T: ciò che è assurdo. Potrebbe darsi che g fosse tangente a uno dei cerchi g', g''....: noi possiamo evitare subito questo caso, impicciolendo il cerchio g. Potremo dunque supporre che i cerchi g, g', g''.... siano a due a due esterni l'uno all'altro. Indichiamo con γ la regione limitata dal piano del cerchio g, e da quella calotta di Q, cui appartiene il punto B; indichiamo con γ', γ''.... le regioni equivalenti a γ. Per quanto abbiamo dimostrato tutte queste regioni sono affatto esterne l'una all'altra. Se C è un punto di γ, i punti equivalenti a C sono tutti esterni a γ. È dunque impossibile che B sia un punto limite di infiniti poliedri normali del gruppo G: in tal caso infatti, per quanto abbiamo dimostrato più sopra, in γ esisterebbero infiniti punti equivalenti al punto C.

Resta dunque dimostrato con tutto rigore che:

3. ***Se w è un pezzo di Q, in cui esiste almeno un punto B, che sia punto limite di infiniti campi normali, il gruppo G non può essere pr. dis. in tutto w.***

E possiamo anche dimostrare:

4. ***Se w' è un altro pezzo del contorno di Q, in ogni intorno di B esiste almeno un punto equivalente a un punto qualsiasi E di w'.***

Sia E un punto di w'; se questo teorema non fosse vero, esisterebbe un intorno circolare ε di E, tale che tanto ε, quanto gli intorni equivalenti sarebbero tutti esterni a un intorno β di B. Se C fosse un punto posto nella regione limitata dal piano passante per la periferia di ε, e quella calotta di Q, a cui appartiene E, allora B non potrebbe essere punto limite di punti equivalenti a C: ciò che è contrario a quanto abbiamo già dimostrato in 1.

Ora, se un poliedro fondamentale non ha alcuna faccia su Q, allora ogni punto di Q è punto limite di infiniti poliedri fondamentali. Dalle quattro proposizioni precedenti segue appunto che in tal caso G non è pr. dis. in alcun pezzo di Q: ciò che appunto noi avevamo enunciato.

Noi dimostreremo ora un teorema, che farà meglio riconoscere l'importanza dei precedenti risultati.

Se il gruppo G opera in modo pr. dis. in una regione w di Q, esso opera in modo pr. dis. su tutto Q (eccettuati al più dei punti che non riempiono alcun pezzo di Q, ossia che giacciono su linee eccezionali) *e viceversa.*

Ricordando che i punti di Q sono in relazione biunivoca continua coi punti del piano complesso π della variabile x, il precedente teorema equivale al seguente:

Se un gruppo kleiniano G opera in modo pr. dis. in una regione, per quanto piccola, del piano π della variabile complessa x, esso opera in modo pr. dis. in tutto il piano π (eccettuate al più delle linee eccezionali) *e viceversa.*

Per dimostrare questo teorema, cerchiamo intanto quando un gruppo kleiniano G può non operare in modo pr. dis. in ogni pezzo di una regione ω di π. In tal caso ogni punto della regione w, che è su Q immagine di ω, è punto limite di infiniti poliedri fondamentali: quindi per il teorema IV di pag. 197, ogni punto E di Q è equivalente a un punto E' di w. Ma E' è punto limite di infiniti poliedri fondamentali; altrettanto avverrà dunque per E. Quindi G non è pr. dis. in ogni intorno del punto generico E di Q.

Il nostro teorema si può anche dimostrare in modo diretto.

Infatti, nelle nostre ipotesi, in ogni pezzo ρ (per quanto piccolo) di ω deve esistere qualche punto lasciato fisso da almeno una trasformazione di G. Supponiamo infatti, ciò che nulla toglie alla generalità, che ρ contenga il punto $x = 0$; e si consideri entro ρ una piccola area circolare g di raggio τ, il cui centro sia il punto $x = 0$. Io dico che in g esiste almeno un punto lasciato fisso da una trasformazione non identica di G. Supponiamo che ciò non sia. Sia g' un'area circolare, interna e concentrica a g di raggio τ' ($< \tau$). Esisteranno, per ipotesi, in G delle trasformazioni $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, che porteranno un punto $x = \varepsilon$ di g' ($|\varepsilon| < \tau'$) in un altro punto $x = \varepsilon'$ di g' ($|\varepsilon'| < \tau'$). Sia T una di esse. I due punti $x = \lambda$, $x = \mu$ (distinti o coincidenti) lasciati fissi dalla nostra trasformazione T, dovrebbero essere esterni a g e quindi dovrebbe essere $|\lambda| > \tau$, $|\mu| > \tau$. Troviamo facilmente (in virtù della equazione $\varepsilon' = \frac{\alpha \varepsilon + \beta}{\gamma \varepsilon + \delta}$ e del fatto che $x = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ *soltanto* se $x = \lambda$, o se $x = \mu$) $\alpha : \beta : \gamma : \delta = \varepsilon \varepsilon' - \varepsilon' (\lambda + \mu) + \lambda \mu : \lambda \mu (\varepsilon' - \varepsilon) : \varepsilon - \varepsilon' : \varepsilon \varepsilon' - \varepsilon (\lambda + \mu) + \lambda \mu$. Facciamo ora tendere τ, e quindi anche $\varepsilon, \varepsilon'$ a zero, ricordando che $|\lambda| > \tau$, $|\mu| > \tau$. Dalle uguaglianze precedenti si trae che $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$ tendono rispettivamente il primo a 1, gli altri due a 0. La trasformazione T diverrebbe infinitesima, ciò ch'è assurdo, perchè G è p. d. t. i. Dunque *in g, e quindi in ogni pezzo di ω esiste qualche punto lasciato fisso da una trasformazione di G.*

Dimostreremo ora che G non è pr. dis. in alcuna regione di π. Infatti, se G non è pr. dis. nell'intorno di un punto A, non è neppure pr. dis. nell'intorno di ogni punto equivalente ad A. Basterà dunque dimostrare che ogni punto generico di π possiede in ω almeno un punto equivalente. Se in g esiste un punto A, che sia lasciato fisso da una trasformazione T non ellittica di G, allora ogni punto di π (che non coincida col secondo punto di π, lasciato fisso da T) sarà trasformato dalla T^{ρ} (ρ intero

positivo o negativo sufficientemente grande) in un punto A', vicino quanto si vuole ad A, e perciò interno a g e quindi anche a ω. Per dimostrare che un punto generico di π è equivalente ad almeno un punto di ω, ci basta dunque esaminare il caso che le infinite trasformazioni di G, le quali lasciano fisso un punto di g sono tutte ellittiche. Sia $x = \varepsilon$ il punto, interno a g, lasciato fisso da una di queste trasformazioni $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ $(\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$. Sarà $|\varepsilon| \leq \tau$, $\gamma\varepsilon^2 + (\delta - \alpha)\varepsilon = \beta$. Quindi

$$|\beta| \leq |\gamma|\,\tau^2 + \tau\,|\delta - \alpha|.$$

La nostra trasformazione è ellittica per ipotesi; quindi $\alpha + \delta$ è reale, e in valore assoluto minore di 2. Quindi

$$(18)\quad \begin{cases} |\delta| \leq |\alpha + \delta| + |\alpha| \leq 2 + |\alpha|, \\ |\alpha| \leq |\alpha + \delta| + |\delta| \leq 2 + |\delta|, \\ |\delta - \alpha| \leq |\alpha + \delta| + 2|\delta| \leq 2 + 2|\delta|; \end{cases}$$

cosicchè

$$(19)\quad |\beta| < |\gamma|\,\tau^2 + 2\tau + 2\tau|\delta|,$$

$$(20)\quad |\alpha\delta| = |\beta\gamma + 1| \leq |\beta\gamma| + 1 \leq 1 + |\gamma|^2\tau^2 + 2\tau|\gamma| + 2\tau|\gamma\delta|.$$

Dalle (18) e (20) si trae:

$$(21)\quad |\delta|^2 \leq [|\alpha| + 2]\,|\delta| \leq 2(1 + \tau|\gamma|)\,|\delta| + (1 + \tau^2|\gamma|^2 + 2\tau|\gamma|),$$

ossia

$$(21)'\quad [|\delta| - (1 + \tau|\gamma|)]^2 \leq 2\,(1 + \tau|\gamma|)^2.$$

Supponiamo ora che $|\gamma|$ resti inferiore a una costante finita. Dalle (21) si trae che anche $|\delta|$ resterà inferiore a una costante finita; e altrettanto per la (19) accadrà di $|\beta|$ e per le (18) di $|\alpha|$. Il gruppo G p. d. t. i. conterrebbe infinite trasformazioni, i cui coefficienti sono in valore assoluto minori di una costante finita: ciò, che è assurdo (teor. I del § 19, pag. 121). Dunque $|\gamma|$ non si può conservare inferiore a una costante finita. Ma la distanza λ dei due punti lasciati fissi dalla nostra trasformazione (distanza calcolata con la metrica euclidea) è data dalla: $\lambda^2 = \frac{|(\delta + \alpha)^2 - 4|}{|\gamma^2|} \leq \frac{4}{|\gamma|^2}$.

Quindi λ si può rendere piccolo a piacere. Cosicchè tra le infinite trasformazioni ellittiche di G, che lasciano fisso almeno un punto A, interno a g, ve ne sono di quelle, che lasciano fisso un altro punto A', vicino a piacere al punto A, e quindi interno a ω. In ω, e quindi anche in ogni pezzo di ω, si potranno trovare due punti A, A' vicini a piacere, lasciati fissi da una stessa trasformazione ellittica T di G.

Sia Γ il gruppo ciclico generato dalla T (che sarà un sottogruppo di G). Sia L un arco di cerchio, congiungente A, A'; e siano L', L'' gli archi di cerchio, trasformati di L per le T, T^{-1}. Tanto la regione limitata da L, L', quanto la regione limitata da L', L'' sono campi fondamentali per Γ. E, notiamolo, una di esse è interna al cerchio, cui appartiene L. Se dunque A, A' sono abbastanza vicini, e scegliamo il cerchio, cui appartiene L, abbastanza piccolo, il gruppo Γ avrà un campo fondamentale tutto interno a ω. Perciò ogni punto di π sarà equivalente a un punto di ω rispetto al gruppo Γ, e quindi anche rispetto al gruppo G. Quindi G non è pr. dis. nell'intorno di un punto qualunque di π.

Se dunque invece in π esiste una regione, in cui G è pr. dis., il gruppo G sarà pr. dis. in ogni regione di π.

c. d. d.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè G sia pr. dis. in un pezzo di π e quindi anche in tutto π, è che un suo campo fondamentale P in R abbia almeno una faccia su Q; in tal caso ogni altro poliedro fondamentale (equivalente a P) ***avrà almeno una faccia su Q. Tutte queste faccie riempiranno tutta la superficie Q, esclusi al più dei punti eccezionali, che non possono però coprire alcun pezzo*** (a due dimensioni) ***di Q.***

L'insieme I delle faccie, che un poliedro fondamentale K_0 di G ha su Q, costituisce un campo fondamentale a uno o più pezzi di G sulla Q: inquantochè ogni punto non eccezionale A di Q ha uno e un solo punto equivalente A' appartenente a I. Infatti, se A appartiene a una faccia del campo fondamentale K_0

la trasformazione di G, che porta K_i in K_0, porta A in un punto appartenente a I.

I punti di π, a cui corrispondono su Q dei punti appartenenti a I, riempiranno uno o più poligoni, il cui insieme Γ si potrà considerare come campo fondamentale (a uno o più pezzi) di G su π. Ora se il poliedro K_0 ha un numero finito di faccie, che si estendano all'infinito, ogni faccia di I sarà limitata da linee intersezioni di Q coi piani limitanti K_0. Ma le sezioni piane di Q hanno su π per immagine dei cerchi. Quindi: *Se il poliedro fondamentale di G ha un numero finito di faccie che si estendano all'infinito, il campo fondamentale di G su Q è formato da un numero finito di poligoni a lati circolari.* Tale conclusione non è più senz'altro legittima in generale quando il poliedro sia ad infinite faccie (*).

Dimostreremo ora che *i punti di* π, *eccezionali per un gruppo kleiniano G* (cfr. più sopra), *o sono in numero minore o uguale a 2, o sono in numero infinito.* Infatti una trasformazione di G deve naturalmente portare un punto eccezionale in un altro punto eccezionale, e quindi non può che permutare tra loro i punti eccezionali. Se questi punti sono in numero h finito, le loro permutazioni sono pure in numero finito; e poichè G contiene infinite trasformazioni, esisteranno in G due trasformazioni *distinte* T_1, T_2, che permutano nello stesso modo gli h punti eccezionali. La trasformazione *non identica* $T = T_1 T_2^{-1}$ di G lascierà fissi ciascuno degli h punti eccezionali; e poichè nessuna trasformazione non identica di G può lasciar fissi più di 2 punti di π, sarà $h \leq 2$.

c. d. d.

(*) Poichè data una curva arbitraria su Q è sempre possibile trovare un poliedro ad infinite faccie tale che i punti della curva siano punti di condensazione di punti delle faccie del poliedro. Debbo questa osservazione al mio amico Eugenio Levi.

§ 31. — Reti di campi fondamentali.

Noi ci volgiamo allo studio della distribuzione dei campi ndamentali di un gruppo kleiniano G pr. dis. nel piano π della ›rrispondente variabile complessa x. Questi campi riempiranno ıtto π, esclusi soltanto alcuni punti singolari, che non possono erò formare un insieme denso in una regione, per quanto pic- ɔla, di π. Per studiarne la distribuzione in π noi faremo alcune ›otesi restrittive, supponendo finito il numero di alcuni enti inee, poligoni, ecc.), che incontreremo nella nostra discussione. lcune dimostrazioni acquistano così maggior semplicità; altre ıvece diventano rigorose, soltanto in virtù delle nostre ipotesi. ascieremo senz'altro al lettore di riconoscere quale delle at- ıali dimostrazioni valga in generale.

Noi supporremo che un poliedro fondamentale K_0 per G abbia ılla quadrica assoluto Q un numero *finito* di faccie, ciascuna elle quali abbia un numero *finito* di lati. Se queste condizioni ›no soddisfatte per un particolare poliedro fondamentale, esse ıranno soddisfatte per ogni altro poliedro fondamentale. Sia ν numero delle faccie di K_0 sulla Q, e siano $p_0, p'_0, \ldots, p_0^{(\nu-1)}$ i ɔrrispondenti poligoni sul piano π della variabile complessa x; er le nostre ipotesi questi poligoni (§ 30, pag. 202) saranno a ıti circolari; e la regione

$$I' = p_0 + p'_0 + \ldots + p_0^{(\nu-1)}$$

ırà un campo fondamentale per G in π. I lati di questi poli- oni saranno a due a due equivalenti rispetto a G (§ 24, pag. 148). ʼimostreremo che si può, sostituendo a uno di questi poligoni n poligono equivalente, fare in modo che il campo fondamen- ıle consti di un numero *finito* di poligoni, tali che un lato di no di questi poligoni sia equivalente a un lato dello stesso oligono. Ove infatti ciò non accadesse già per i poligoni p_0, $'_0$ ecc., si potrebbe trovare un lato l di uno di questi poligoni, . es. di p_0, che fosse equivalente a un lato l' di un altro poli-

gono $p_0^{(k)}$. La trasformazione di G, che porta l' in l, porterà $p_0^{(k)}$ in un poligono $p_1^{(k)}$ adiacente a p_0. E, se noi nel sistema Γ dei poligoni p sostituiamo a $p_0^{(k)}$ il poligono $p_1^{(k)}$, otterremo ancora un sistema di poligoni, che si può considerare come campo fondamentale di G in π. Siccome però i poligoni $p_1^{(k)}$, p_0 formano, uniti insieme, un unico poligono connesso, il nuovo sistema di poligoni conterrà soli $\nu - 1$ poligoni distinti. Se un lato di uno di questi poligoni è equivalente a un lato di un altro di questi stessi poligoni, noi potremo ripetere il precedente ragionamento. Così continuando, noi otterremo in fine un sistema di poligoni $r_0, r'_0, \ldots, r_0^{(\mu-1)}$, il quale è un campo fondamentale (non connesso se $\mu > 1$) per il gruppo G, il quale soddisfa alle condizioni volute. Applichiamo ora al sistema di questi μ poligoni tutte le trasformazioni di G. Otterremo nuovi sistemi di poligoni $r_h, r'_h, \ldots, r_h^{(\mu-1)}$ $(h = 1, 2, 3 \ldots)$, i quali riempiranno tutto π (esclusi al più i punti singolari). I poligoni $r^{(i)}$ formeranno uno o più sistemi, o, come si suol dire, una o più reti $R^{(i)}$ di poligoni, tali che da un poligono della rete si possa passare a ogni altro poligono della rete stessa, attraversando un numero finito di poligoni della stessa rete, e senza attraversare alcun vertice dei poligoni stessi. Indicheremo queste reti, che potranno essere in numero finito o infinito, con $R_1^{(i)}, R_2^{(i)}, R_3^{(i)} \ldots$ (*). Tutte le reti $R_s^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu - 1)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ copriranno tutto il piano π, (eccettuati i punti eccezionali). Se $R_s^{(i)}$ è una delle reti precedenti, noi indicheremo con $G_s^{(i)}$ quel sottogruppo di G, che trasforma $R_s^{(i)}$ in sè stessa. Osserviamo che, se a un gruppo kleiniano G pr. dis. corrisponde una sola rete, è $\mu = 1$ (si noti

(*) Si noti che da questa definizione segue che da un poligono di una rete $R_h^{(i)}$ non si può passare a un poligono di una rete $R_k^{(i)}$ $(h \neq k)$, attraversando un numero finito di poligoni r, a due a due adiacenti. E altrettanto avviene per due poligoni $r^{(i)}$, $r^{(j)}$, appartenenti a due reti $R^{(i)}$, $R^{(j)}$ $(i \neq j)$, perchè un lato in un poligono $r^{(i)}$, non è mai equivalente a un lato di un poligono $r^{(j)}$.

però che, pure essendo $\mu = 1$, al gruppo G possono benissimo corrispondere più reti). Se a un gruppo kleiniano corrispondono due reti, allora $\mu = 1$, oppure $\mu = 2$. Queste due reti occuperanno su π due regioni distinte, separate da un insieme perfetto di punti, non denso in alcuna regione di π, che è tutto formato di punti singolari per G (*) e che noi diremo costituire la ***linea*** limite, o la *linea* singolare di G. (Un caso particolare di questa specie è p. es. quello dei gruppi fuchsiani, quando il cerchio limite C è luogo di punti singolari) (§ 30, pag. 195). In un intorno α di un punto qualunque A della L il gruppo G non è pr. dis. In α esistono quindi (§ 30, pag. 199) infiniti punti lasciati fissi da una qualche trasformazione di G. Nell'intorno di un punto B lasciato fisso da una trasformazione iperbolica o lossodromica T di G (**), esistono infiniti punti equivalenti rispetto al gruppo ciclico generato da T, e quindi anche rispetto a G. Il punto B ***non può*** quindi ***essere interno alle due reti e quindi appartiene a*** L. Ora G, nell'intorno α di A, non è pr. dis. Quindi (§ 30, pag. 197, teor. 4) in esso esistono infiniti punti equivalenti al punto B testè citato. Ma un punto B', equivalente a B, è un punto lasciato fisso da una trasformazione T' di G simile alla trasformazione T. Quindi T' è pure iperbolica o lossodromica; e B' giace quindi su L.

In ogni tratto di L esistono dunque infiniti punti, lasciati fissi da una trasformazione iperbolica o lossodromica di G. In altre parole: ***i punti lasciati fissi da una trasformazione iperbolica o lossodromica di G formano un insieme ovunque denso su L.*** Sia ora V una trasformazione lossodromica di G, che lascia fisso il

---

(*) Infatti questi punti sono punti limiti di infiniti poliedri normali; e, per quanto si è già osservato, in ogni loro intorno il gruppo G non può essere pr. dis. (cfr. § 30, pag. 197).

(**) Se non esistesse alcun punto B siffatto, il gruppo G rientrerebbe tra i gruppi, di cui abbiamo fatto cenno al § 30, pag. 189. Esso dunque, o sarebbe fuchsiano, o possederebbe un numero finito di punti singolari, e quindi un'unica rete di campi fondamentali.

punto D di L. Potremo supporre che D sia il punto $x = 0$, e che V sia una trasformazione del tipo $x' = k\, e^{i\theta}\, x$ (k, θ costanti reali). Le potenze positive o negative di V (a seconda che $k < 1$ o $k > 1$) portano ogni altro punto C di π in altri punti C', C''...., i cui moduli tendono zero, mentre i loro argomenti differiscono l'uno dall'altro precisamente di θ. I punti C', C'', ... sono, per così dire, disposti a spirale intorno al punto D, lasciato fisso da V. Ora L è trasformata in sè stessa da ogni trasformazione di G, e quindi anche dalla V. Quindi la L è avvolta, diremo così, a spirale attorno al punto A. Se dunque G è proprio un gruppo kleiniano, e quindi contiene trasformazioni lossodromiche, in ogni intorno di L esisteranno infiniti punti, attorno ai quali L è avvolta a spirale. Tanto basta per poter asserire che L non è una linea analitica, ossia che l'*unico caso, in cui un gruppo G ammetta due reti, divise da una linea analitica, è quello in cui G è fuchsiano, e questa linea è una retta o un cerchio.*

Nel caso di gruppi kleiniani con più di due reti si può ancora dimostrare in modo analogo che il luogo dei punti singolari forma una linea non analitica.

Osservazione. — Come, quando si parla di un gruppo fuchsiano G, si ammette che la linea limite divida il piano in due regioni, ciascuna delle quali è trasformata in sè stessa da G, così più avanti, nelle applicazioni analitiche dei gruppi kleiniani, ammetteremo sempre, quando diremo che N è una rete di campi fondamentali di un gruppo kleiniano G, che il gruppo G trasforma N in sè stessa. Chè, se così non fosse, noi ci limiteremo alla considerazione di quel sottogruppo di G, che trasforma N in sè stessa.

§ 32. — I vertici dei campi fondamentali.

Sia G un gruppo fuchsiano su una variabile complessa x: e sia L il cerchio o la retta reale del piano π di questa variabile, che il gruppo G trasforma in sè stesso. Siano R_1, R_2 le due regioni, in cui L divide π, ed R_1 sia la regione interna alla L.

Un campo fondamentale normale per G avrà (§ 30, pag. 194) per immagine su π due poligoni, $K_0^{(1)}$, $K_0^{(2)}$ trasformati l'uno dell'altro nell'inversione per raggi rettori reciproci definita da L, e i cui lati sono rette o cerchi ortogonali a L, oppure sono pezzi di L comuni all'uno e all'altro dei due poligoni. Se esistono dei lati di quest'ultima specie, i due poligoni formeranno un unico poligono connesso, che sarà un campo fondamentale K_0 di G in π; se invece tali lati non esistono, i poligoni $K_0^{(1)}$, $K_0^{(2)}$ saranno campi distinti; e daranno origine a due reti di poligoni affatto distinte, separate da L. Se i lati e quindi anche i vertici di $K_0^{(1)}$, $K_0^{(2)}$, sono in numero infinito, i punti limiti di questi vertici giaceranno naturalmente su L, e potranno anche essere essi stessi vertici (non isolati) di $K_0^{(1)}$, $K_0^{(2)}$. Noi volgeremo ora la nostra attenzione ai vertici *isolati* di $K_0^{(1)}$, $K_0^{(2)}$. Noi studieremo i vertici di $K_0^{(1)}$; i vertici di $K_0^{(2)}$ si studieranno in modo perfettamente simile. I vertici *isolati* di $K_0^{(1)}$ si sogliono distinguere in *accidentali*, o *non accidentali*, secondo che essi *non sono* oppure *sono* lasciati fissi da qualche trasformazione non identica di G. I vertici non accidentali si distinguono a lor volta in due specie, secondo che essi giacciono, oppure non giacciono sulla linea L.

Prima di esaminare una dopo l'altra tutte queste categorie di vertici, faremo un'osservazione generale.

I lati di un poligono fondamentale K sono (§ 24, pag. 148) a due a due equivalenti rispetto a G. Potrà anche avvenire che un lato di K corrisponda a sè stesso; vuol dire che in tal caso esiste in p una trasformazione non identica T che muta un tal lato in sè stesso. La T possiederà su questo lato un punto fisso A, che dividerà l in due pezzi l', l'' e sarà a periodo 2. I punti di l' saranno da T (o da T^{-1}) portati nei punti di l''. Noi considereremo, per semplicità, l' ed l'' come due lati distinti di K, ed A come un vertice di K.

La corrispondenza così stabilita tra i lati porta a una corrispondenza tra i vertici di K. Sia p. es. A un vertice di K ed l_1 uno dei lati di K uscenti da A. Il gruppo G porterà l_1 in un lato

equivalente l_2, e il punto A in uno dei vertici posti su l_2, per es. nel vertice B. Sia l_3 l'altro lato di K uscente da B: esso sarà equivalente a un lato l_4 di K. Il punto B sarà equivalente a un vertice C di K, posto su l_4, e che potrà essere distinto da A. Otterremo così dei vertici $A, B, C, \ldots$ equivalenti tra loro. Noi diremo che essi formano un *ciclo*. Naturalmente può accadere che un *ciclo* di vertici contenga un solo vertice A: questo avverrà quando i due lati l_1, l_2 di K concorrenti in A sono tra di loro equivalenti.

Vertici di uno stesso ciclo sono contemporaneamente accidentali, o non accidentali, posti o non posti sulla linea L.

1. Vertici non accidentali posti su L. — È facile vedere che ***una trasformazione T non identica di G, che trasformi in sè stesso un vertice A posto su L, non può essere iperbolica.*** Infatti il sottogruppo ciclico Γ, generato da una trasformazione iperbolica V di G, ha per campo fondamentale normale P di centro C_0 la regione limitata dalle geodetiche equidistanti dal punto C_0 e dai punti trasformati di C_0 rispettivamente per le V, V^{-1}. E questo campo fondamentale non contiene nè all'interno, nè sul contorno i punti lasciati fissi dalla V. Essendo Γ sottogruppo di G, il campo fondamentale per G di centro C_0 è tutto interno a P. A fortiori vale dunque il nostro teorema. Quindi:

Un vertice non accidentale, posto su L, è lasciato fisso da un sottogruppo ciclico di G, generato da una trasformazione parabolica di G (*).

Dimostreremo ora un teorema, che si può considerare come reciproco del teorema precedente.

Se A è un punto del cerchio limite C, lasciato fisso da una trasformazione parabolica T del gruppo fuchsiano G, allora un poligono fondamentale normale ha almeno un vertice nel punto A, o in un punto equivalente. Se infatti A non fosse vertice di alcun poligono fondamentale, esso dovrebbe essere punto ***limite*** di po-

(*) Una trasformazione ellittica di G non lascia fisso alcun punto di L.

ligoni fondamentali non equivalenti rispetto al gruppo ciclico Γ generato da T, perchè ogni punto, interno a C, per quanto vicino ad A, appartiene almeno a un poligono fondamentale. Noi potremmo dunque trovare entro L infiniti punti $D_0, D_1, D_2 \ldots$ aventi per limite il punto A (*) equivalenti rispetto a G, ma non equivalenti rispetto a Γ.

Formiamo un campo fondamentale P normale per il gruppo ciclico Γ. Esso sarà limitato da due geodetiche uscenti da A, ossia da due cerchi tangenti fra loro nel punto A, e normali in A a L. Ogni punto D sarà equivalente a un punto di P rispetto a Γ, e quindi (poichè Γ è sottogruppo di G) anche rispetto a G. Potremo dunque supporre che i punti D siano tutti interni a P.

Per semplicità rappresentiamo, con una trasformazione lineare sulla x, (§ 22, pag. 137) la regione interna a L sul semipiano positivo π' di una variabile complessa, che ancora indicheremo con x, in modo che il cerchio L sia rappresentato sull'asse reale r di π', le geodetiche uscenti da A abbiano per immagine le rette normali a r e il punto D_0 abbia per immagine il punto $x = i$. Come sappiamo, il gruppo G sarà mutato in un gruppo simile, le cui trasformazioni hanno coefficienti reali. Il campo P avrà per immagine una striscia limitata da r e da due rette normali a r. I punti D avranno per immagine dei punti equivalenti di questa striscia E_0, E_1, $E_2 \ldots$, la cui distanza da r cresce indefinitamente (perchè i punti D hanno A per punto limite). Ora tutti questi punti devono essere trasformati del punto (E_0) $x = i$ per una trasformazione di G. Noi dimostreremo, con un ragionamento dovuto al Fricke, che ciò è assurdo. Sia infatti $x' = \frac{\alpha_i x + \beta_i}{\gamma_i x + \delta_i}$ ($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ costanti reali legate dalla $\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1$) quella trasformazione T_i di G che porta E_0 in E_i. Indichiamo

(*) Questa asserzione si dimostra nello stesso modo, con cui nel § 30 abbiamo dimostrato l'asserzione analoga per i poliedri fondamentali di un gruppo kleiniano.

con x_i il valore di x in E_i. Sarà evidentemente:

$$x_i = \frac{\alpha_i \gamma_i + \beta_i \delta_i}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} + i \frac{1}{\gamma_i^2 + \delta_i^2}.$$

Ma per ipotesi i punti E_i si allontanano indefinitamente da r; potremo dunque trovare, tra le precedenti, una trasformazione T_i tale che $\gamma_i^2 + \delta_i^2$, e quindi anche γ_i, δ_i siano minori in valore assoluto di una costante positiva ε piccola a piacere. Ora la trasformazione parabolica T, che lascia fisso il punto A, sarà nella nuova rappresentazione di G definita da una equazione del tipo $x' = x + a$ (a = costante reale).

La trasformazione $T_i^{-1}\, T\, T_i$ (che pure appartiene a G) è definita dalla:

$$x' = \frac{(1 + \gamma_i \delta_i a)\, x + \delta_i^2 a}{- \gamma_i^2 a x + (1 - \gamma_i \delta_i a)}.$$

Ricordando che γ_i, δ_i si possono rendere piccoli a piacere, si riconosce subito che questa trasformazione è infinitesima. Il gruppo G conterrebbe dunque trasformazioni infinitesime, ciò che è assurdo. Dunque il punto A è vertice di almeno uno e quindi di infiniti campi fondamentali: e ogni campo fondamentale avrà quindi per vertice o il punto A, o un punto equivalente.

Possiamo completare questi risultati, dimostrando che:

Se i poligoni fondamentali, che G ha in π, formano due reti distinte, e se un campo fondamentale per G entro L ha un numero finito di vertici, ogni vertice, che un tale campo ha sulla linea L, non è accidentale.

Infatti, se un tal vertice A fosse un vertice accidentale, esso formerebbe parte di un ciclo di più vertici $A, A', \ldots, A^{(\nu)}$ tutti equivalenti tra loro. Uno dei lati uscenti da A, p. es. l_2, sarebbe equivalente a un lato l'_1 uscente da A'; l'altro lato l'_2 uscente da A' sarebbe equivalente a un lato l''_1 uscente da A'' e così via fino a che avremo un lato $l_2^{(\nu)}$ uscente da $A^{(\nu)}$ equivalente al secondo lato l_1 uscente da A. La trasformazione di G che porta l'_1 in l_2 porta p in un nuovo poligono p' adiacente a p lungo l_2 e avente ancora per vertice A. Indicheremo con λ'_2 l'altro lato

di p' uscente da A, che sarà il trasformato di l'_2 e che quindi sarà equivalente a l''_1. La trasformazione di G che porta l''_1 in λ'_2, porterà p in un nuovo poligono p'', adiacente a p' lungo λ'_2 e avente per vertice A. Così continuando giungeremo in fine a un poligono equivalente a p, avente per vertice A e di cui un lato λ è equivalente a $l_2^{(\nu)}$ e quindi anche a l_1. Questo lato λ non può coincidere con l_1: infatti se ciò fosse i successivi poligoni $p, p', p'' \ldots\ldots$, che sono disposti l'uno accanto all'altro, e che hanno A per vertice comune, sarebbero tali che ogni raggio uscente da A dovrebbe penetrare entro uno di questi poligoni, o far parte del suo contorno: ossia, per esprimermi grossolanamente, questi poligoni coprirebbero almeno una volta l'intorno di A. Ma ciò è assurdo, perchè questi poligoni devono essere per ipotesi tutti interni a L, e non possono uscire dalla regione limitata da questa linea. Quindi la trasformazione di G, che porta l_1 in λ, e che naturalmente deve trasformare A in sè stesso, non può essere l'identità. ***A non è dunque un vertice accidentale.***

c. d. d.

Osserviamo ancora che, se A è un vertice posto su L, e se esso forma un ciclo a un solo vertice, allora i lati l_1, l_2 concorrenti in A sono trasformati l'uno dell'altro da una trasformazione parabolica di G. ***Essi sono tangenti tra loro in A,*** ossia formano un angolo ***euclideo nullo.*** Altrettanto avviene se A fa parte di un ciclo a più termini. Ne viene dunque che, ***se i poligoni fondamentali di G in π formano due reti distinte, e se uno (e quindi ognuno) di essi ha un numero finito di lati, allora la somma degli angoli (euclidei) di un tal poligono in un ciclo di vertici posti su L è uguale a zero.***

Vertici non accidentali interni a L. — Un tale vertice A sarà lasciato fisso da un sottogruppo ciclico di G, generato da una trasformazione ellittica T di G.

Viceversa sia U una qualsiasi trasformazione ellittica di G;

e sia O il punto lasciato fisso dalla U entro L. Io dico che ***ogni campo fondamentale per G entro L ha almeno un vertice non accidentale in un punto equivalente ad O.*** Infatti ogni punto equivalente ad O è lasciato fisso da una qualche trasformazione ellittica di G: e in un suo intorno, piccolo a piacere, esistono quindi almeno due punti distinti equivalenti. Ora in un qualsiasi campo fondamentale K esiste almeno un punto A equivalente a un tale punto O: e, per quanto sappiamo, esso non potrà essere interno a K, ma dovrà cadere sul contorno di K. Esso potrà o essere un vertice di K nel senso proprio della parola, oppure esistere su un lato di K: ma io dico che in quest'ultimo caso, A è ancora un vertice di K, quando si estenda nel modo esposto più sopra (pag. 207), il significato della parola: ***vertice*** (di un campo fondamentale). E infatti, se A giace su un lato l di K, la trasformazione ellittica di G, che ha A per punto fisso, deve trasformare l in un cerchio passante per A, e non attraversante K. Esso deve quindi trasformare l in sè stesso. Dunque l è diviso da A (cfr. a pag. 207) in due pezzi l', l'' equivalenti rispetto a G, e che quindi si devono considerare come lati distinti di K, mentre A si deve considerare come un vertice.

Sia ora A un vertice non accidentale di un campo fondamentale di G, interno alla L. E sia (§ 30, pag. 189) n l'ordine del sottogruppo Γ ciclico di G, che lascia fisso A. Il gruppo Γ sarà generato da una trasformazione ellittica T di periodo n. Un cerchio l ortogonale a L (geodetica) uscente da A, e il cerchio l' trasformato per la T formeranno un angolo $\frac{2\pi}{n}$; il cerchio l e un qualsiasi cerchio equivalente rispetto a Γ formeranno un angolo multiplo di $\frac{2\pi}{n}$. Se dunque A costituisce da solo un ciclo di vertici, e quindi i due lati uscenti da A sono equivalenti rispetto a T, questi due lati formano tra di loro l'angolo $\frac{2\pi}{n}$.

Se invece A fa parte di un ciclo di più vertici, siano A', A'', ..., $A^{(\nu)}$ gli altri vertici del ciclo. Per fissare le idee supporremo $\nu = 1$; metodo e risultati sono generali. I lati l_1, l_2 uscenti da A

saranno rispettivamente equivalenti ai lati l_3, l_4 uscenti da A'. La trasformazione di G che porta A' in A, l_3 in l_1, porterà l_4 in un cerchio l ortogonale a L, equivalente a l_4, e quindi anche a l_2. L'angolo che ha per lati l, l_2, e che è attraversato da l_1 è dunque un multiplo di $\frac{2\pi}{n}$; poichè in esso non penetrano evidentemente cerchi uscenti da A, ed equivalenti ad l_2, questo angolo sarà proprio uguale a $\frac{2\pi}{n}$. Questo angolo è la somma dell'angolo A del nostro poligono, e dell'angolo $l_1\, l$ che l_1 forma con l; ma quest'angolo è evidentemente uguale all'angolo A' del nostro poligono fondamentale, perchè i gruppi fuchsiani, essendo movimenti nella solita metrica iperbolica, mutano un angolo in un angolo uguale (*). Ne possiamo dunque dedurre:

La somma degli angoli di un poligono fondamentale nei vertici di uno stesso ciclo non accidentali, e non posti su L è uguale a $\frac{2\pi}{n}$, ***se n è il periodo della trasformazione ellittica T, che genera quel sottogruppo ciclico di*** Γ, ***che lascia fisso uno di questi vertici.***

Questo teorema, che vale anche per campi fondamentali non normali, ricorda il teorema sopra trovato per i vertici posti su L, per i quali evidentemente T è parabolica, e ha quindi un periodo $n = \infty$.

Vertici accidentali. — Abbiamo già visto che, almeno sotto certe ipotesi, (pag. 210) i vertici accidentali di un campo fondamentale per G sono tutti interni alla L. Noi ci limiteremo quindi allo studio di un ciclo di vertici accidentali interni a L. I vertici di un tale ciclo sono lasciati fissi soltanto dalla trasformazione identica di G, la quale si può anche considerare come una trasformazione ellittica di G di periodo $n = 1$. Ripetendo ragionamenti affatto analoghi ai precedenti, troviamo che:

(*) Notiamo che è indifferente misurare questi angoli nella metrica euclidea, o nella solita metrica iperbolica, perchè questa metrica è rappresentata *conformemente* entro L.

La somma degli angoli di un campo fondamentale in un ciclo di vertici accidentali, interni a L, è uguale a 2π.

Noteremo ancora che mentre ogni vertice non accidentale di un campo fondamentale normale K di centro C è equivalente ad almeno un vertice di un altro campo fondamentale normale K', qualunque sia il centro di questo nuovo campo, un vertice accidentale di K può benissimo essere equivalente a un punto interno a K. Per questa ragione appunto, tali vertici hanno ricevuto il nome di vertici accidentali.

Cicli di vertici. — Il Fricke ha dimostrato, che, se il centro C del campo fondamentale normale K_0 è un punto generico, ogni ciclo di vertici accidentali è un ciclo di tre vertici (*), mentre invece un ciclo di vertici non accidentali è un ciclo a un solo vertice. Noi ci accontenteremo di dimostrare l'ultima asserzione, specialmente importante.

Un ciclo non accidentale di vertici è (cfr. quanto abbiamo detto in questo paragrafo) formato tutto di vertici, ciascuno dei quali è lasciato fisso da una trasformazione non iperbolica del gruppo G. Viceversa, se A_0 è un punto lasciato fisso da una trasformazione non iperbolica T di G, esiste in K_0 almeno un vertice equivalente ad A_0. Supponiamo T ellittica. Il punto A_0 è posto a distanza non euclidea finita. Siano A_1, A_2 .... i punti equivalenti ad A_0. Se C_0 è generico, le distanze da C_0 a due dei punti A sono sempre diverse; quindi, per definizione (§ 25), il

(*) È evidente che un tale ciclo ha almeno tre vertici, perchè ogni campo fondamentale è convesso, ossia giace tutto da una stessa banda di ciascuno dei suoi lati (cfr. quanto si è detto al § 30, pag. 196, per i poliedri fondamentali di un gruppo kleiniano) e quindi ha tutti gli angoli minori di un angolo piatto, mentre la somma degli angoli di K in un ciclo di vertici accidentali è uguale a due angoli piatti.

I vertici di uno stesso ciclo, interni alla L, sono equidistanti, nella solita metrica iperbolica, da C. Se un ciclo di vertici accidentali fosse di 4 vertici, il punto C sarebbe equidistante da questi quattro punti tra loro equivalenti. E il Fricke ha dimostrato (loc. cit., pag. 245) che un punto generico non può essere equidistante da quattro punti equivalenti.

campo K_0 non potrà avere più di un vertice equivalente ad A_0. Sia invece T una trasformazione parabolica. Il punto A_0 giace sul cerchio limite L, e sarà vertice, per quanto sappiamo, di infiniti campi K equivalenti a K_0. Basterà dimostrare che A_0 forma da sè solo in questi campi K un ciclo di vertici, o in altre parole che quei due lati di uno di questi campi K, che escono da A_0, sono tra loro equivalenti rispetto a T. Ricorriamo alla solita rappresentazione del gruppo G come gruppo trasformante in sè un cerchio limite L. Il punto A_0 giace su L, e la trasformazione T trasforma in sè stesso ogni cerchio γ tangente a L in A_0. E per quanto abbiamo detto a pag. 209 noi potremo trovare un tal cerchio γ passante per un punto C_i equivalente a C_0, in modo che entro di esso non esista alcun altro punto equivalente a C_0. Se di più C_0 è generico, nessuna trasformazione di G, che non sia una potenza di T, potrà portare il punto C_i in un altro punto posto su γ (*). Il punto C_i giacerà su γ tra due punti C', C'' trasformati di C_i rispettivamente dalla T e dalla T^{-1}. I punti, posti in un intorno abbastanza piccolo di A_0 e compresi nella regione σ limitata dalle due geodetiche g', g'' (cerchi taglianti ortogonalmente la L) luogo dei punti equidistanti rispettivamente da C_i e C' e da C_i e C'', hanno evidentemente una distanza geodetica da C_i, che è minore della distanza geodetica da essi a un altro punto

---

(*) Supponiamo infatti che per ogni punto B_i di un archetto ε di γ, terminato al punto C_i, esista una trasformazione T' di G, che non sia una potenza della T, e che porti B_i in un altro punto di γ. Poichè i punti di ε formano un insieme, che ha la potenza del continuo, e le trasformazioni di G formano un insieme numerabile, esisterebbe tra le considerate trasformazioni T' di G almeno una trasformazione T', che porta infiniti punti di ε in punti di γ. La T' dovrebbe dunque trasformare in sè stessa il cerchio γ, e quindi lascierebbe fisso il punto A_0. La T' sarebbe dunque una potenza di T contro l'ipotesi fatta. D'altra parte, almeno quando ε è abbastanza piccolo, i punti di ε non hanno alcun punto equivalente entro γ; da ciò segue l'asserzione del testo.

qualunque C_k equivalente a C_i (*). Essi appartengono dunque tutti al campo fondamentale normale, che ha per centro C_i. Questo campo fondamentale ha dunque un vertice in A_0, e per lati uscenti da A_0 ha proprio le geodetiche g', g'', trasformate l'una dell'altra mediante la T. Il punto A_0 forma quindi da sè solo in tale campo un ciclo di vertici. Altrettanto avverrà quindi in K_0 di quel vertice di K_0, che è equivalente ad A_0.

Le precedenti considerazioni si possono estendere facilmente ai gruppi kleiniani, almeno per il caso che un poligono fondamentale K di un tale gruppo G abbia un numero finito di lati. Così p. es. si potrà dimostrare che nessun vertice di K può essere lasciato fisso da una trasformazione iperbolica, o lossodromica di G, che i vertici di K, posti sulla linea limite, o singolare, non possono essere accidentali, che la somma degli angoli di K in un ciclo di vertici è $\frac{2\pi}{n}$, se n è l'ordine del sottogruppo ciclico di G, che lascia fisso un vertice del ciclo. In particolare si deve porre $n = 1$, se i vertici del ciclo sono accidentali, $n = \infty$, se i vertici del ciclo considerato sono lasciati fissi da una trasformazione parabolica.

§ 33. — Indice di una trasformazione.

Siano $K_0, K_1 \ldots$ campi fondamentali di un gruppo fuchsiano G.

Nel § 24 abbiamo visto che, se $T_1, T_2 \ldots$ sono le trasformazioni che portano un campo K_0 in un campo adiacente, quella

---

(*) In una regione perfetta, interna a L, non possono esistere infiniti punti equivalenti a C_0: quindi potremo trovare un altro cerchio γ' tangente a L in A_0, e contenente γ al suo interno, in guisa che nella regione limitata da g', g'', γ, γ' non esistano punti equivalenti a C_0. In altre parole i punti equivalenti a C_0, non posti su γ, sono esterni a γ'. Ora è ben evidente che i punti posti in un intorno abbastanza piccolo di A_0 hanno da C_i una distanza geodetica minore di quella, che essi hanno da qualunque punto esterno a γ'. Ed è poi chiaro senz'altro che, se essi sono posti nella regione compresa tra g' e g'', la loro distanza da C_i è minore o uguale alla distanza da essi a un punto equivalente a C_i posto su γ.

trasformazione U che porta K_0 in un altro campo fondamentale K_t si può porre uguale al prodotto di s delle trasformazioni T_1, $T_2 \ldots$, se esistono $s - 1$ campi fondamentali K_1, K_2, ..., K_{s-1} tali che ognuno dei campi K_0 K_1 $K_2 \ldots$ K_{s-1} K_t (il primo e l'ultimo esclusi) sia adiacente a quello che lo precede e a quello che lo segue. Queste trasformazioni T potranno anche non essere tutte distinte. Vediamo dunque che ogni trasformazione U di G si può scrivere sotto la forma:

$$(A) \qquad U = T_\iota^{k_\iota} T_\iota^{k_\iota} \ldots . T_\sigma^{k_\sigma}, \quad (k_1 + k_2 + \ldots . + k_\sigma = s)$$

dove le T_ι, T_ι, ..., T_σ sono al solito trasformazioni che portano K_0 in un campo adiacente, e k_ι, k_ι, ..., k_σ sono intieri *positivi* (tutti nulli, solo se $U = 1$). Naturalmente accadrà che una trasformazione U si può scrivere in infinite maniere sotto la forma precedente; cosicchè la somma $k_\iota + k_\iota + \ldots . + k_\sigma$ non avrà un valore determinato, quando sia data la U. Ma, data la U, sarà determinato il valore più piccolo possibile, che può assumere la somma $k_\iota + k_\iota + \ldots . + k_\sigma$. Questo valore (nullo, solo se $U = 1$) si dirà l'*indice* di U.

E, per quanto abbiamo visto più sopra, possiamo concludere:

Sia U la trasformazione di G, che porta K_0 in un nuovo campo K_t, e siano A, B due punti, l'uno di K_0, l'altro di K_t. La U avrà un indice non maggiore di s, se una linea λ terminata ai punti A, B attraversa, oltre K_0, un numero s di campi fondamentali senza passare per alcun vertice dei campi K.

Se A, B sono punti generici di K_0, K_t, la geodetica AB si può scegliere come linea λ; e il numero s *non può superare il numero dei lati della rete di campi K, che sono attraversati da λ.*

Vogliamo ora mostrare una limitazione notevole per il numero s.

Supporremo dapprima che un campo fondamentale non abbia vertici a distanza infinita nella solita metrica iperbolica, in cui G è un gruppo di movimenti.

Otterremo *una formola, che, con poche modificazioni, si po-*

trebbe anche dimostrare per i gruppi pr. dis. di movimenti in una metrica qualsiasi M, quando un loro campo fondamentale non abbia alcun punto sulla regione W (§ 25, pag. 152) ***singolare per M*** (la quale nel caso della metrica di Bólyai coincide appunto coi punti a distanza infinita) (*).

Isoliamo ogni vertice V di K_0 con un piccolo cerchio γ di centro V e di raggio R (**). Sceglieremo R uguale per tutti i cerchi γ e così piccolo, che questi cerchi non abbiano a due a due punti comuni. Per ipotesi i vertici sono tutti a distanza finita, e quindi non possono appartenere ad infiniti campi fondamentali. Siccome per l'ipotesi fatta i vertici di K_0 sono in numero finito, esisterà un intero finito h, tale che ogni vertice appartiene a non più di h campi fondamentali.

Esiste evidentemente un numero positivo μ minore

1. della distanza da B a un punto qualsiasi posto sul contorno di K_i, o su uno dei cerchi γ,

2. della distanza da un punto di uno dei cerchi γ a un punto posto su un altro dei cerchi γ,

3. di tutte le corde di un campo K_i (segmenti di geodetiche, congiungenti due punti del contorno di K_i posti su due lati distinti di K_i), che non attraversano alcun cerchio γ.

Sia l la distanza geodetica $A\,B$; e la geodetica $A\,B$ attraversi, oltre K_0, s campi fondamentali. Io dico che si può trovare una costante α, tale che:

$$s \leq \alpha\, l. \tag{22}$$

Supponiamo dapprima che la geodetica $A\,B$ non attraversi alcuno dei cerchi γ. Segniamo i punti B_r in cui il segmento geodetico $A\,B$ è diviso dalle geodetiche, che separano un campo fondamentale dall'adiacente. Due consecutivi tra i punti B_r, B apparten-

(*) Cfr. la nota alla pag. seguente.

(**) Cerchio in una metrica a due dimensioni è il luogo dei punti, la cui distanza geodetica da un punto fisso O ha un valore costante R. Il punto O dicesi centro, la quantità R raggio del cerchio.

gono a uno stesso campo fondamentale; se quel pezzo della geodetica AB, che è terminato ad essi, non attraversa alcuno dei nostri cerchi, la lunghezza di questo pezzo è superiore o uguale a μ. La geodetica AB non può dunque contenere più di $\frac{l}{\mu}$ di questi pezzi. Vale dunque la (22), ove si ponga $\alpha = \frac{1}{\mu}$.

Supponiamo ora che la geodetica AB incontri qualche cerchio γ. Il numero dei campi fondamentali, che la geodetica AB attraversa entro uno dei nostri cerchi, è per ipotesi inferiore ad h. Se la geodetica AB attraversa ρ dei nostri cerchi, essa contiene ρ pezzi distinti, che vanno da B o da un punto dei nostri cerchi a un punto posto sopra un altro cerchio, e la cui lunghezza è perciò superiore a μ. Quindi il numero ρ soddisfa alla $\rho \leq \frac{l}{\mu}$; e la nostra geodetica non può attraversare entro i varii cerchi, da essa incontrati che al più $\frac{l}{\mu} h$ campi fondamentali.

Supponiamo ora che lo i^{esimo} dei $\rho + 1$ segmenti, esterni ai cerchi γ, che appartengono al segmento geodetico AB, attraversi h_i lati della rete di campi K. Se n è il numero dei valori dell'indice i, tali che $h_i = 0$, il segmento AB conterrà $n + \Sigma (h_i - 1) = n + \Sigma h_i - \rho$ segmenti parziali distinti, che sono corde di un campo K e non attraversano alcun cerchio γ; e, per quanto abbiamo detto per il caso precedente, sarà

$$n + \Sigma h_i - \rho \leq \frac{l}{\mu} \qquad \Sigma h_i \leq \rho + \frac{l}{\mu} \leq 2 \frac{l}{\mu}.$$

In tutto dunque la nostra geodetica non può attraversare più di $\frac{2l}{\mu} + \frac{l}{\mu} h$ campi fondamentali. Si può dunque in ogni caso soddisfare alla (22), ponendo $\alpha = \frac{2}{\mu} + \frac{h}{\mu}$.

Quindi: *l'indice di una trasformazione che porta un punto A di K_0 in un punto B è minore o uguale ad αl, se l è la distanza geodetica AB* (*).

(*) Il teorema si estende facilmente a metriche reali M qualsiasi a un qualunque numero di dimensioni, come abbiamo già detto. Si osserverà anzitutto:

Completeremo ora questo teorema per il caso che i campi fondamentali abbiano qualche vertice a distanza infinita: il metodo che seguiremo non si può però senz'altro estendere a gruppi qualsiasi di movimenti. Mentre quindi il risultato precedente vale in generale, noi ci accontenteremo, in quanto segue, di riferirci a gruppi fuchsiani G.

---

1. In virtù dell'ipotesi che un campo fondamentale non ha punti sulla regione W singolare per M, esiste un intero h, tale che ogni punto ove M è regolare, non può appartenere a più di h campi fondamentali K (cfr. § 25, osservaz. a pag. 156).

2. Una trasformazione, che porti K_0 in un campo, che con K_0 ha almeno un punto comune, si può scrivere come prodotto di non più di h trasformazioni, scelte tra quelle trasformazioni T, che portano K_0 in un campo adiacente.

3. Se $B_0, B_1, \ldots, B_n$ sono punti posti su una stessa geodetica, che si susseguono nell'ordine qui scritto, se ciascuno dei punti B_i appartiene a una faccia F_i della rete di campi K, se le faccie $F_0, F_1, \ldots, F_n$ non hanno alcun punto comune, esiste una costante μ, dipendente soltanto dalla rete di campi K, a cui la distanza $B_0 B_n$ è superiore. Infatti, se sulle faccie F_i si potessero trovare infiniti sistemi di punti B_i, tali che $\lim B_0 B_n = 0$, questi sistemi di punti avrebbero almeno un punto limite, il quale sarebbe punto comune a $F_0, F_1, \ldots, F_n$. Poichè tutti i campi K sono congrui nella nostra metrica, è ben evidente potersi supporre che μ dipenda solo dalla nostra rete di campi fondamentali, e che μ sia anche minore della distanza da B a un punto del contorno del corrispondente campo K.

Noi potremo indicare i punti comuni alla geodetica AB e alle faccie dei campi K con

$$C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1r_1}, C_{21}, C_{22}, \ldots, C_{2r_2}, \ldots, C_{\rho 1}, C_{\rho 2}, \ldots, C_{\rho r_\rho},$$

in guisa che questi punti si succedano proprio nell'ordine qui scritto, e che le faccie passanti per $C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{ir_i}$ abbiano comune un punto non posto sulla faccia passante per $C_{i+1,1}$. I ρ segmenti distinti $C_{i1} C_{i+1,1}$ e $C_{\rho 1} B$ sono maggiori di μ: quindi $\rho < \frac{l}{\mu}$. Ma per la seconda delle tre osservazioni precedenti il prodotto delle r_i trasformazioni T corrispondenti ai punti $C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{ir_i}$ si può scrivere come prodotto di non più che h delle stesse trasformazioni T. L'indice della trasformazione, che porta A in B, non può dunque superare $\varkappa l$, se $\varkappa = \frac{h}{\mu}$.

Se i campi fondamentali hanno vertici a distanza infinita, allora, come sappiamo, il gruppo G contiene trasformazioni paraboliche e viceversa. Noi possiamo anzi supporre (§ 32, pag. 215) che ogni vertice A di un campo fondamentale a distanza non euclidea infinita (posto sul cerchio limite) costituisca da sè solo un ciclo, cosicchè i due lati uscenti da A siano tra loro equivalenti rispetto alla trasformazione parabolica di G, che lascia fisso A. Tra le trasformazioni T_i, che portano K_0 in un campo adiacente, ve ne sono di paraboliche: anzi, (§ 32, pag. 208) ogni trasformazione parabolica di G è trasformata, mediante una qualche trasformazione di G, di una trasformazione parabolica che porta K_0 in un campo adiacente.

Circondiamo, come sopra, tutti i vertici a distanza non euclidea finita mediante cerchi γ di uno stesso raggio nella metrica di Bólyai; e tracciamo per ogni vertice V a distanza infinita (posto sul cerchio limite L) un piccolo cerchio euclideo δ tangente in V a L. Supporremo scelti questi nuovi cerchi δ in guisa tale che cerchi tangenti a L in vertici equivalenti siano pure equivalenti, e che tanto questi ultimi cerchi δ, quanto i cerchi precedenti γ, posti a distanza non euclidea finita, non abbiano, presi a due a due, alcun punto comune. Ciò che è sempre possibile, *se noi escluderemo il caso che un campo fondamentale abbia infiniti lati e quindi anche infiniti vertici.*

Sia ora A un punto generico del campo K_0, esterno a tutti i cerchietti da noi tracciati, e sia B un altro punto generico interno a un campo K_i, ma esterno anch'esso agli stessi cerchietti. La distanza geodetica AB sia uguale a l. La geodetica AB attraverserà, oltre a K_0, un certo numero s di campi fondamentali. La trasformazione U di G che porta K_0 in K_i sarà uguale a un prodotto

$$(A)' \quad U = T_{i_1}^{k_1} T_{i_2}^{k_2} \dots T_{i_n}^{k_n} (k_1 + \dots + k_n = s) \; (k_i = \text{interi positivi})$$

dove le T sono trasformazioni (che portano K_0 in campi adiacenti) distinte o no. *L'indice di U sarà minore o uguale a s.*

Un punto mobile N che si muova lungo la geodetica $A B$ passerà s volte da un campo a un campo adiacente. Questi passaggi sono di due specie:

α) Il punto N attraversa una linea di divisione tra due campi fondamentali in un punto N' esterno a tutti i cerchi δ. Il numero di questi passaggi sarà indicato con s_1: e come sopra si dimostra che si può trovare una costante α tale che:

$$s_1 < \alpha\, l. \tag{22'}$$

β) Il punto N attraversa una linea di divisione in un punto N'' interno a uno dei cerchi δ. Noi indicheremo con s_2 il numero di questi passaggi. Sarà chiaramente

$$s = s_1 + s_2. \tag{23}$$

I due campi fondamentali adiacenti, sul cui contorno giace N'' hanno evidentemente un vertice comune nel punto di contatto di δ e L, e sono quindi trasformati l'uno nell'altro mediante quella trasformazione parabolica di G, che lascia fisso questo punto di contatto. E questa trasformazione parabolica sarà simile a una delle trasformazioni paraboliche, che portano K_0 in un campo adiacente.

Ora ad ognuno dei punti N', ed a ognuno dei punti N'' corrisponde un fattore del prodotto $T_{i_1}^{k_1} T_{i_2}^{k_2} \ldots . T_{i_n}^{k_n} = U$. Evidentemente le s_2 trasformazioni, fattori del prodotto citato, che corrispondono ai punti N'', sono tutte ***paraboliche***, per quanto abbiamo testè osservato.

Se noi, in modo analogo a quanto facemmo più sopra, indichiamo con σ una quantità non nulla inferiore alle distanze dal punto A (o da un punto posto sul contorno di uno dei cerchi γ, δ) dai punti dei cerchi γ, δ (dai punti di un altro dei cerchi γ, δ) è ben evidente che la geodetica $A B$ non può attraversare più di $\frac{l}{\sigma}$ cerchi δ. Indichiamo con E, F i due punti in cui la $A B$ incontra un cerchio δ. Per le nostre ipotesi, B non può essere interno al segmento $E F$. Sia λ la lunghezza di quell'arco

finito di cerchio δ, che è terminato ai punti E, F. Sia D il punto in cui δ tocca L: questo punto sarà lasciato fisso da una trasformazione parabolica T di G, e sarà vertice di infiniti campi fondamentali. Indichiamo con

$$\ldots\ldots g_{-3}\, g_{-2}\, g_{-1}\, g_0\, g_1\, g_2 \ldots\ldots$$

le infinite geodetiche uscenti da D, che servono di divisione tra questi campi fondamentali. Il movimento T trasformerà in sè stesso il cerchio δ e porterà una di queste geodetiche g_i nella successiva g_{i+1}. Quindi la lunghezza dell'arco di δ, che è compreso tra due geodetiche successive g_i, g_{i+1}, è costante (indipendente da i); noi indicheremo questa costante con ε. Se il tratto di geodetica $E\,F$ passa per s' punti N'', ossia attraversa s' geodetiche g_i, altrettanto avverrà di quell'arco del cerchio δ, che è compreso tra E ed F, cosicchè: $s' - 1 \leq \frac{\lambda}{\varepsilon}$.

Le trasformazioni, che compariscono nel secondo membro della $(A)'$, corrispondenti a questi s' punti N'', sono tutte identiche a una stessa trasformazione (simile a T) la quale comparirà in $(A)'$ al più con un esponente s'.

Dimostreremo più avanti che si può fissare il fattore di proporzionalità per l'elemento lineare della nostra metrica di Bólyai in guisa che la lunghezza L_1 del segmento geodetico $E\,F$ soddisfi alla disuguaglianza

$$L_1 > \log \lambda: \tag{24}$$

ammesso ciò, per quanto precede sarà

$$\log (s' - 1) < L_1 - \log \varepsilon.$$

Se β è una costante maggiore di log 2 e tale che per tutti i cerchi δ valga la $\beta - \log 2 > - \log \varepsilon$, avremo che

$$\log s' < L_1 + \beta.$$

Ripetendo per tutti i cerchi δ attraversati dalla geodetica $A\,B$ le precedenti considerazioni, e osservando che la somma

delle lunghezze L_1 corrispondenti a tutti questi cerchi è minore certamente di l, avremo

$$\Sigma \log s' < l + n \beta,$$

dove n è il numero dei cerchi δ, attraversati dalla geodetica $A\,B$. Si ha quindi:

$$n \leq \frac{l}{\sigma}, \tag{25}$$

$$\Sigma \log s' \leq l \left(1 + \frac{\beta}{\sigma}\right). \tag{25$'$}$$

Dunque concludendo: *Il prodotto, che comparisce nel secondo membro della* $(A)'$, *è formato di due specie di fattori. La somma* s_1 *degli esponenti relativi ai fattori di prima specie soddisfa alla* (22)'. *I fattori di seconda specie sono tutti potenze di trasformazioni paraboliche, che portano* K_0 *in un campo adiacente; essi sono in numero inferiore a* $\frac{l}{\sigma}$; *e la somma dei logaritmi degli esponenti relativi soddisfa alla* (25)'.

Ci basterà soltanto dimostrare la formula (24), che abbiamo provvisoriamente ammessa. Rappresentiamo perciò la metrica di Bólyai su un semipiano euclideo π, su cui ξ, η sono coordinate cartesiane ortogonali, e $\eta > 0$. Il punto D avrà per immagine un punto D' della retta $\eta = 0$, p. es. il punto $\xi = \eta = 0$; δ avrà per immagine un cerchio δ' tangente in D' alla retta $\eta = 0$. L'equazione di δ' sarà dunque del tipo: $\xi^2 + (\eta - a)^2 = a^2$. Potremo supporre la nostra rappresentazione fatta in modo tale che la geodetica $E\,F$ sia una retta $\xi =$ cost., la quale incontrerà δ' in due punti E' ed F' di coordinate (ξ_1, η_1) e (ξ_1, η_2) immagini di E, F. L'elemento lineare sarà (§ 10, pag. 60)

$$d\,s^2 = h^2 \frac{d\,\xi^2 + d\,\eta^2}{\eta^2} \qquad (h = \text{cost.}).$$

Noi potremo fissare il fattore h (finora indeterminato) ponendo $h = 2$. Le lunghezze non euclidee L_1 e λ sono uguali all'integrale $\int d\,s = 2\int \frac{\sqrt{d\,\xi^2 + d\,\eta^2}}{\eta}$, esteso rispettivamente al segmento $E'\,F'$

della retta $E' F'$ e all'arco $E' F'$ del cerchio $D' E' F'$. Il calcolo effettivo dimostra (poichè evidentemente $2a = \eta_1 + \eta_2$)

$$L_1 = \left| 2 \log \frac{\eta_2}{\eta_1} \right| \qquad \lambda = \left| \frac{2(\eta_2 - \eta_1)}{\sqrt{\eta_2 \eta_1}} \right|;$$

da cui risulta immediatamente la (24). Infatti, supposto per fissare le idee $\eta_2 > \eta_1$, e, posto $\zeta = \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}}$, si ha $\zeta > 1$; e la (24) diventa

$$4 \log \zeta > \log 2 + \log \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right), \qquad \text{ossia} \qquad \zeta^5 + 2 > 2\zeta^2.$$

Posto $\zeta = 1 + \varepsilon$, si ha $\varepsilon > 0$ e questa disuguaglianza diventa

$$1 + \varepsilon + 8\varepsilon^2 + 10\varepsilon^3 + 5\varepsilon^4 + \varepsilon^5 > 0,$$

che è ben evidente perchè $\varepsilon > 0$.

§ 34. - I gruppi di movimenti p. d. t. i. nelle metriche ellittiche ed euclidee, e i gruppi pr. dis. di similitudini euclidee.

Scopo di questo paragrafo è la determinazione di quei gruppi p. d. t. i. sulla variabile complessa x, i quali o sono composti di un numero finito di trasformazioni, o si possono considerare come gruppi pr. dis. di similitudini o di movimenti euclidei sul piano π della variabile x (§ 30).

Comincieremo dai gruppi discontinui finiti. Noi abbiamo già visto al § 30 (pag. 187) che la ricerca di tali gruppi equivale alla ricerca dei gruppi p. d. t. i. di movimenti di una sfera euclidea J in sè stessa; in quanto che, se noi proiettiamo stereograficamente coi procedimenti del § 10 (pag. 51 e seg.) i punti della sfera sui punti di un piano π, tangente a J nell'origine, e in cui siano coordinate cartesiane ortogonali la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di x, ogni gruppo p. d. t. i. di movimenti di J in sè stessa individua un gruppo discontinuo finito di trasformazioni lineari sulla variabile x. E anzi con tale procedimento otteniamo tutti i gruppi discontinui finiti di trasformazioni lineari sulla x.

Sia G uno dei nostri gruppi, e ne sia K un campo fondamentale normale sulla sfera J. Il poligono K abbia $s = 2q$ lati, a due a due equivalenti. n vertici non accidentali, che noi potremo supporre a due a due non equivalenti (§ 32, pag. 214), m cicli di vertici accidentali, ciascuno dei quali conterrà almeno tre vertici. I due lati uscenti da un vertice non accidentale saranno tra loro equivalenti, e non saranno equivalenti ad alcun altro lato di K. Se il gruppo G è ciclico, sarà

$$\text{(I)} \qquad s = 2 \qquad n = 2 \qquad m = 0.$$

In tutti gli altri casi sarà $s > 2$: e K non potrà contenere due vertici A, B non accidentali consecutivi, perchè altrimenti il lato $A\,B$ dovrebbe essere equivalente ai due lati adiacenti: ciò che è assurdo.

Il numero $2\,q - n$ dei vertici accidentali è quindi non minore di n, cosicchè

$$(\alpha) \qquad m \geqq 1: \qquad 2\,q - n \geqq n \qquad \text{ossia } n \leq q.$$

Il poligono K possiede almeno $n + 3\,m$ vertici: e quindi

$$(\beta) \qquad 2\,q \geqq n + 3\,m.$$

I sottogruppi ciclici di G, che lasciano fisso un vertice non accidentale di K abbiano rispettivamente i periodi $l_1, l_2, \ldots, l_n$. La somma degli angoli di K sarà uguale a $2\pi\left(m + \Sigma \frac{1}{l_i}\right)$. Ma, per noti teoremi della geometria elementare della sfera euclidea questa somma è maggiore di $(s - 2)\,\pi$. Quindi

$$(\gamma) \qquad m + \sum_1^n \frac{1}{l_i} > q - 1.$$

È poi evidentemente

$$(\delta) \qquad l_i > 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (l_i \text{ interi}).$$

Dalle (β), (γ) si ha:

$$(\varepsilon) \qquad \sum_1^n \frac{2}{l_i} > n + m - 2.$$

Dalla (δ) si deduce

$$(\zeta) \qquad n \geq \sum_1^n \frac{2}{l_i}.$$

Confrontando con (ε) otteniamo:

$$m < 2$$

e quindi per la (α)

$$m = 1.$$

La (γ) diventa

$$4 + \Sigma \frac{2}{l_i} > 2\,q.$$

Donde, per la (ζ), si trae

$$4 > 2\,q - n.$$

Ora $2\,q - n$ è il numero dei vertici accidentali, il quale non è inferiore a $3\,m = 3$. Il numero dei vertici accidentali è quindi proprio uguale a 3: *i vertici accidentali formano cioè un solo ciclo a tre termini.* Sarà dunque $2\,q = n + 3$; e quindi, per (α), $2\,n \leq n + 3$, $n \leq 3$. Il numero n può avere i soli valori 1, 2, 3. È impossibile che $n = 1$, perchè ogni trasformazione di G lascia fissi *almeno* due punti; se fosse $n = 2$, tutte le trasformazioni di G lascierebbero fissi gli stessi due punti; e noi ritorneremmo al caso già trattato di gruppi G ciclici. È dunque $n = 3$; e quindi $2\,q = n + 3 = 6$, $q = 3$. Ponendo in (γ) i valori trovati di q, m, n, troviamo

$$(\eta) \qquad \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} > 1.$$

Ricordando che le l_i sono interi maggiori di 1, troviamo facilmente che gli unici casi possibili sono

(II)	$n = 3;\ q = 3$	$l_1 = l_2 = 2;\ l_3 \geq 2,$
(III)	$n = 3;\ q = 3$	$l_1 = 2;\ l_2 = 3;\ l_3 = 3,$
(IV)	$n = 3;\ q = 3$	$l_1 = 2;\ l_2 = 3;\ l_3 = 4,$
(V)	$n = 3;\ q = 3$	$l_1 = 2;\ l_2 = 3;\ l_3 = 5.$

Naturalmente non consideriamo come distinti due tipi, che si deducano l'uno dall'altro con una permutazione delle l_1, l_2, l_3.

Si domanda se i casi qui trovati come possibili corrispondano a gruppi effettivi, e a quali. Il tipo (I) è realizzato dai gruppi ciclici; studiamo quindi gli altri 4 tipi.

Indichiamo con A_1, A_2, A_3 rispettivamente i tre vertici non accidentali di K, con B_1, B_2, B_3 i vertici accidentali; e scegliamo le notazioni in modo che i vertici di K si seguano nell'ordine $A_1\ B_1\ A_2\ B_2\ A_3\ B_3\ A_1$. Il lato $A_2\ B_1$ sarà equivalente al lato $A_2\ B_2$. La trasformazione che porta $A_2\ B_1$ in $A_2\ B_2$ porterà il triangolo $A_2\ B_1\ A_1$ in un triangolo $A_2\ B_2\ A'_1$, equivalente ad $A_2\ B_1\ A_1$. Così pure la trasformazione che porta $A_3\ B_3$ in $A_3\ B_2$ porterà il triangolo $A_3\ B_3\ A_1$ in un triangolo $A_3\ B_2\ A''_1$. Ricordando che la somma degli angoli di K nei vertici B è uguale a 2π, riconosciamo che i raggi $B_2\ A'_1$, $B_2\ A''_1$ coincidono. E poichè $B_2\ A'_1 = B_1\ A_1$, $B_2\ A''_1 = B_3\ A_1$, $B_1\ A_1 = B_3\ A_1$, sarà $B_2\ A'_1 = B_2\ A''_1$; e quindi i punti A'_1, A''_1 coincidono. Potremo quindi parlare del quadrangolo $A_1\ A_2\ A'_1\ A_3$. Questo quadrangolo R sarà pure un campo fondamentale per G, ottenuto da K con un cambiamento lecito. Il lato $A_3\ A'_1$ sarà uguale a $A_3\ A_1$; il lato $A_1\ A_2$ al lato $A'_1\ A_2$. I triangoli $A_1\ A_2\ A_3$, $A'_1\ A_2\ A_3$, di cui R è somma, hanno dunque lati uguali; e gli angoli di ciascuno di questi triangoli sono ordinatamente uguali a $\frac{\pi}{l_1}$, $\frac{\pi}{l_2}$, $\frac{\pi}{l_3}$. I due triangoli si potranno dedurre perciò l'uno dall'altro con una riflessione rispetto al lato $A_2\ A_3$. Consideriamo ora insieme al quadrangolo tutti i quadrangoli equivalenti; e dividiamo ciascuno di essi in due triangoli con un segmento equivalente ad $A_2\ A_3$. La sfera sarà evidentemente divisa in un numero finito di triangoli: due triangoli adiacenti saranno trasformati l'uno dell'altro mediante la simmetria definita dal lato comune.

Per costruire i nostri gruppi procederemo dunque così: costruiamo sulla sfera euclidea un triangolo, i cui angoli sono $\frac{\pi}{l_1}$, $\frac{\pi}{l_2}$, $\frac{\pi}{l_3}$: ciò è possibile in virtù della (η). Applichiamo a questo triangolo le tre riflessioni definite dai suoi tre lati; otterremo tre nuovi triangoli, a cui applicheremo di nuovo riflessioni at-

torno ai loro lati. Così continuando otterremo dei triangoli in numero finito, che le più semplici considerazioni di geometria elementare dimostrano ricoprire la sfera una e una sola volta. Due triangoli adiacenti di questa rete formano un quadrangolo, che si può assumere a campo fondamentale di uno dei nostri gruppi. Si può dare di questi gruppi una elegante costruzione geometrica, che conferma il precedente risultato, e mette in evidenza i legami tra essi e i poliedri regolari. Cominciamo dal tipo (II). I triangoli, che, accoppiati con un triangolo simmetrico, formeranno un campo fondamentale per il nostro gruppo, hanno gli angoli uguali rispettivamente a $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{l_3}$. Sia Δ uno di questi triangoli, e sia Δ' il triangolo simmetrico rispetto al lato che congiunge il secondo e il terzo vertice. Otterremo così un triangolo $\Delta + \Delta'$, che ha gli angoli ordinatamente uguali a $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{l_3}$. Il gruppo ciclico generato dalla rotazione di ampiezza $\frac{2\pi}{l_3}$ attorno al terzo vertice porterà questo triangolo in altri $l_3 - 1$ triangoli, che tutti insieme riempiono un emisfero. Essi, insieme con gli l_3 triangoli, che se ne deducono con una riflessione attorno al cerchio massimo γ limitante questo emisfero formano una rete di $2\,l_3$ triangoli uguali, che è precisamente una rete di poligoni fondamentali per il nostro gruppo. Sul cerchio massimo γ avremo l_3 vertici della nostra rete, che saranno pure vertici di un poligono regolare P inscritto in γ. Gli altri due vertici della nostra rete sono i poli di γ; proiettando da ambedue il poligono P otteniamo due piramidi regolari simmetriche rispetto a γ, o, come si suol dire, *una doppia piramide Q regolare inscritta nella nostra sfera che le $2\,l_3$ operazioni del nostro gruppo trasformano in sè stessa.* Viceversa se noi proiettiamo sulla sfera dal suo centro le faccie di una doppia piramide Q, regolare e inscritta nella sfera stessa, otteniamo la superficie della sfera divisa in una rete di triangoli uguali, che possiamo assumere come la rete dei campi fondamentali di un gruppo del tipo (II), le cui operazioni trasformeranno Q in sè stessa. Ecco

perchè i gruppi del tipo (II) si chiamano anche ***gruppi della doppia piramide regolare.***

Passiamo ora ai gruppi del tipo (III). Un campo fondamentale di un tale gruppo è composto di due triangoli Δ, Δ', adiacenti e simmetrici, ciascuno dei quali ha gli angoli uguali a $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Consideriamo i sei triangoli della rete corrispondente, che hanno comune un vertice A, in cui naturalmente tutti avranno un angolo uguale a $\frac{\pi}{3}$. Un ragionamento affatto elementare dimostra che questi sei triangoli costituiscono insieme un solo triangolo D avente tutti e tre gli angoli uguali a $\frac{2\pi}{3}$. Il triangolo rettilineo D' che ha i vertici comuni con D è quindi una faccia di un tetraedro regolare T inscritto nella sfera. Il centro A' di D' è proiettato dal centro della sfera sulla sfera stessa nel vertice A. Il punto di mezzo di un lato l di D dovrà essere vertice di altri due triangoli della nostra rete, i quali saranno adiacenti, e avranno comune un secondo vertice A_1; questo vertice A_1 apparterrà a sei triangoli della nostra rete, che, tutti insieme, formeranno un nuovo triangolo D_1, uguale a D ed adiacente a D lungo il lato l. Il triangolo rettilineo D'_1, che ha i vertici comuni con D_1, sarà una nuova faccia del tetraedro T; il centro A'_1 di D'_1 sarà proiettato dal centro della sfera sulla sfera stessa nel vertice A_1. Così continuando, troviamo che:

I triangoli della rete di un gruppo del tipo (III) *sono in numero di* 24, *cosicchè G è un gruppo di* 12 *operazioni: essi si possono unire a sei a sei in quattro triangoli più grandi, a due a due adiacenti, e i cui quattro vertici sono i vertici di un tetraedro regolare T inscritto nella sfera. Se noi proiettiamo dal centro della sfera sulla sfera stessa i vertici di T, i centri delle faccie T, e i punti di mezzo degli spigoli di T, otteniamo i vertici della nostra rete di triangoli. Se proiettiamo invece i lati, e le altezze delle faccie di T, otteniamo sulla sfera i lati della nostra rete di triangoli. Le operazioni di G trasformano T in sè stesso.*

Viceversa, se T è un tetraedro regolare inscritto nella sfera, e

noi dividiamo ciascuna delle sue faccie mediante le altezze in sei triangoli, e proiettiamo dal centro della sfera sulla sfera stessa i 24 *triangoli così ottenuti, otteniamo la rete dei triangoli di un gruppo G del tipo* (III), *che trasforma T in sè stesso. Due triangoli adiacenti di questa rete, insieme considerati, formano un campo fondamentale per G.*

Ecco perchè i gruppi del tipo (III) (tutti simili tra di loro) si chiamano anche *i gruppi del tetraedro regolare.*

Le stesse relazioni qui trovate tra i gruppi (III) e il tetraedro regolare, si possono dimostrare con metodo affatto analogo tra i gruppi (IV) e l'ottaedro regolare inscritto nella sfera, i gruppi (V) e l'icosaedro regolare inscritto nella sfera. E si trova così in particolare che un gruppo (IV) ha $\frac{8.6}{2} = 24$ operazioni, un gruppo (V) ha $\frac{20.6}{2} = 60$ trasformazioni; le reti corrispondenti di $2.24 = 48$ e di $2.60 = 120$ triangoli si possono ottenere, costruendo un ottaedro o un icosaedro regolare inscritto nella sfera, dividendo ciascuna delle sue faccie in sei triangoli mediante le tre altezze, e proiettando dal centro della sfera tutti i triangoli così ottenuti sulla sfera stessa. Ecco perchè i gruppi del tipo (IV) o (V) hanno ricevuto il nome di *gruppi dell'ottaedro o dell'icosaedro regolare.*

I gruppi qui esaminati hanno ricevuto complessivamente il nome di *gruppi dei poliedri regolari.*

Passeremo ora ai gruppi di movimenti di prima specie nel piano euclideo. Tutte le trasformazioni di un tale gruppo sono del tipo:

$$x' = e^{i\theta} x + \alpha \qquad \left(\alpha = \text{cost.}; \ \frac{\theta}{\pi} = \text{cost. razionale}\right).$$

Un primo tipo è dato dai gruppi ciclici: un secondo tipo è formato dai gruppi composti da sole trasformazioni paraboliche. Per questi ultimi gruppi abbiamo, riprendendo le precedenti notazioni, $n = 0$ se nessun vertice di K è il punto $x = \infty$, $n = 1$ ed

$l_1 = \infty$ in caso contrario. E con ragionamenti analoghi a quelli svolti più sopra troviamo

$$(\beta') \qquad 2\,q \geqslant 3\,m + n$$
$$(\gamma') \qquad 2\,m = 2\,q - 2$$

che, sommate, danno: $2 \geqslant m + n$, ossia $m + n = 1$, oppure $m + n = 2$. Sia $m + n = 1$; se inoltre $n = 1$, si ha $m = 0$, $q = 1$, e il gruppo G è ciclico; se invece $n = 0$, allora $m = 1$, $q = 2$. Il poligono K è perciò un quadrangolo i cui quattro vertici sono tutti accidentali, e costituiscono un unico ciclo. Essi saranno quindi equidistanti dal centro di K, che è quindi inscrivibile in un cerchio. Lati opposti di questo quadrangolo saranno equivalenti rispetto a G, e quindi paralleli. Dunque K è un rettangolo.

Sia invece $m + n = 2$; allora, se $n = 1$, si ha $m = 1$, $q = 2$. Il poligono K avrebbe un vertice non accidentale, e tre vertici accidentali costituenti un unico ciclo. I due lati di K, non concorrenti nel vertice non accidentale ($x = \infty$) dovrebbero essere equivalenti; la trasformazione che porta l'uno nell'altro sarebbe ellittica, contro la nostra ipotesi. Sarà dunque $n = 0$, $m = 2$, $q = 3$. Il poligono K sarà un esagono, tutto a distanza finita, con due cicli di vertici accidentali. Lati opposti di K saranno equivalenti: si riconosce infatti facilmente che ogni altro modo di corrispondenza tra i lati condurrebbe o a cicli di due vertici, o a vertici non accidentali. Lati opposti di K sono quindi uguali e paralleli. Se dunque i vertici di K sono i punti $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, e si seguono proprio in questo ordine, i vertici A_1, A_3, A_5 formano un ciclo, i vertici A_2, A_4, A_6 formano l'altro ciclo. La trasformazione, che porta il lato $A_1\,A_6$ nel lato $A_3\,A_4$, porta il triangolo $A_1\,A_2\,A_6$ in un triangolo $A_3\,A_7\,A_4$: i segmenti $A_7\,A_4$, $A_7\,A_3$ sono rispettivamente uguali e paralleli ai segmenti $A_2\,A_6$, $A_4\,A_5$. La trasformazione, che porta il lato $A_6\,A_5$ nel lato $A_3\,A_2$, porta il triangolo $A_4\,A_5\,A_6$ nel triangolo $A_3\,A_7\,A_2$, come si riconosce ben facilmente. Il parallelogrammo $A_2\,A_6\,A_4\,A_7$ è ancora un campo fondamentale per G, dedotto da K con un cambiamento

lecito. Lati opposti del parallelogrammo saranno tra loro equivalenti. Il tipo precedente rientra come caso particolare in quest'ultimo, quando si supponga che questo parallelogrammo sia proprio un rettangolo. Le trasformazioni, che portano un lato del parallelogrammo nell'opposto saranno del tipo:

$$x' = x + \alpha, \; x' = x + \beta \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta} = \text{quantità non reale}\right),$$

e costituiranno un sistema di trasformazioni generatrici per G. Viceversa ogni gruppo generato da due tali trasformazioni è un gruppo dei tipi precedenti.

Ne scende il teorema: *Un gruppo G di traslazioni p. d. t. i., o è ciclico, o è generabile con due traslazioni $x' = x + \alpha$, $x' = x + \beta$, dove $\frac{\alpha}{\beta}$ è una costante non reale. Le trasformazioni di G saranno tutte e sole le trasformazioni*

$$x' = x + m\alpha + n\beta \qquad (m, n \text{ interi}).$$

Notiamo che, mentre, date le costanti α, β, il gruppo G è completamente individuato, il teorema reciproco non è però vero. Infatti siano λ, μ, ν, ρ interi soddisfacenti alla $\lambda\rho - \mu\nu = \pm 1$. Il gruppo G conterrà le trasformazioni $x' = x + \alpha_1$, $x' = x + \beta_1$, dove si è posto $\alpha_1 = \lambda\alpha + \mu\beta$, $\beta_1 = \nu\alpha + \rho\beta$. E viceversa un gruppo, che contenga queste due trasformazioni, contiene anche le $x' = x + \alpha$, $x' = x + \beta$, e coincide quindi con G. Infatti è $\alpha = \pm(\rho\alpha_1 - \mu\beta_1)$, $\beta = \pm(\lambda\beta_1 - \nu\alpha_1)$.

Osserviamo anzi che tutti i gruppi G, a cui corrisponde uno stesso valore del rapporto $\tau = \frac{\beta}{\alpha}$ sono tra di loro simili, e di più che, scambiando caso mai β con $-\beta$, si può supporre che il coefficiente della parte immaginaria di τ sia positivo.

Ogni trasformazione del gruppo modulare, applicata a τ, fa corrispondere a un gruppo G un gruppo simile. E viceversa valori di τ corrispondenti a gruppi simili sono equivalenti rispetto al gruppo modulare.

Per completare il nostro studio basterà che noi cerchiamo quei gruppi di movimenti euclidei, che contengono trasformazioni (ellittiche)

$$x' = e^{i\theta} x + \alpha \qquad [\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}].$$

Sarà evidentemente

$$n \geqq 1.$$

E con ragionamenti analoghi ai precedenti troviamo:

$$(\alpha'') \qquad m \geqq 1; \qquad n \leqq q;$$

$$(\beta'') \qquad 2q \geqq n + 3m$$

$$(\gamma'') \qquad m + \Sigma \frac{1}{l_i} = q - 1 \qquad l_i > 1$$

$$(\varepsilon''), (\zeta'') \qquad n \geqq \Sigma \frac{2}{l_i} = 2q - 2m - 2 \geqq n + m - 2.$$

Se ne ricava $m = 1$, oppure $m = 2$.

Caso I. $m = 1$. Dalla (γ''), (ζ''), (β'') si trae successivamente:

$$4 + \Sigma \frac{2}{l_i} = 2q \qquad 4 \geqq 2q - n \qquad 2q - n \geqq 3.$$

Sarà quindi o $2q - n = 3$, o $2q - n = 4$; e, poichè $n \leqq q$, ne otterremo rispettivamente:

$$n \leqq q \leqq 3 \quad (\text{se } 2q - n = 3) \qquad n \leqq q \leqq 4 \quad (\text{se } 2q - n = 4).$$

Dovrà dunque essere $q = 2$; $n = 1$ oppure $q = n = 3$; oppure $q = 3$, $n = 2$; oppure $q = n = 4$.

Ricordando le (γ'') troviamo i seguenti tipi possibili:

$$q = n = 3, m = 1; \quad \left.\begin{array}{ll} l_1 = 2, l_2 = 2, l_3 = \infty & (A') \\ l_1 = 2, l_2 = 3, l_3 = 6 & (A'') \\ l_1 = 2, l_2 = 4, l_3 = 4 & (A''') \\ l_1 = 3, l_2 = 3, l_3 = 3 & (A'''') \end{array}\right\} \Sigma \frac{1}{l_i} = 1 \quad (A)$$

$$q = 3, n = 2; m = 1 \quad l_1 = l_2 = 2, \qquad (\alpha)$$

$$q = n = 4; \; m = 1 \quad l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 2. \qquad (B)$$

Caso II. $m = 2$. Dalla (γ''), (ζ''), (β'') si trae:

$$\Sigma \frac{1}{l_i} = q - 3, \qquad 6 \geqslant 2q - n \qquad 2q - n \geqslant 6$$

donde $2q - n = 6$; e, poichè $n \leq q$, sarà $n \leq q \leq 6$.

Sarà dunque:

$$q = 4,\ n = 2;\ \text{oppure}\ q = 5,\ n = 4;\ n = q = 6.$$

Ricordando la (γ'') troviamo i seguenti casi possibili:

$$q = 4,\ n = 2,\ m = 2 \qquad l_1 = l_2 = 2 \qquad (\beta)$$

$$q = 5,\ n = 4,\ m = 2 \qquad l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 2 \qquad (C)$$

$$q = 6,\ n = 6,\ m = 2 \qquad l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l_6 = 2 \qquad (\gamma)$$

L'esistenza effettiva di gruppi dei tipi (*A*), si dimostra in modo simile a quello da noi usato per i gruppi discontinui finiti. E si trova ancora che, se noi costruiamo nel piano euclideo un triangolo Δ, i cui angoli siano $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \frac{\pi}{l_3}$, riflettiamo Δ rispetto ai suoi tre lati, e continuiamo ad applicare lo stesso procedimento ai triangoli, che così si deducono successivamente, il piano euclideo resta diviso in infiniti triangoli; il quadrangolo, somma di due consecutivi tra questi triangoli, è un campo fondamentale per un gruppo del tipo voluto.

Non esiste invece alcun gruppo del tipo (α); infatti il poligono fondamentale K sarebbe un esagono, due vertici soltanto del quale godrebbero della proprietà che i due lati uscenti da uno di essi sarebbero di tra loro equivalenti, mentre gli altri quattro vertici dovrebbero formare un unico ciclo: ciò che si riconosce facilmente impossibile.

Dimostreremo ora l'esistenza di gruppi del tipo (*B*).

Il campo fondamentale K di un tale gruppo sarà un ottagono $A\,A'\,B\,B'\,C\,C'\,D\,D'$. Con A', B', C', D' indichiamo i vertici non accidentali, con A, B, C, D i vertici accidentali, i quali formano un unico ciclo; i lati $A'A$ e $A'B$, BB' e $B'C$, CC' e $C'D$, DD' e $D'A$ sono rispettivamente uguali e per diritto. Siano D'', D''' i punti simmetrici di D' rispetto ai punti A', C'. I trian-

goli $A\,A'\,D'$ e $A'\,D''\,B$, $C\,D'''\,C'$ e $C'\,D'\,D$ saranno equivalenti; i triangoli $B'\,B\,D''$ e $B'\,C\,D'''$ saranno pure uguali ed equivalenti. I segmenti $B'\,D''$ e $B'\,D'''$ saranno uguali e per diritto. Il triangolo $D'\,D''\,D'''$ sarà ancora un campo fondamentale per G, dedotto da K con un cambiamento lecito. Viceversa, se $D'\,D''\,D'''$ è un qualsiasi triangolo, A', B', C' sono i punti di mezzo di $D'\,D''$, $D''\,D'''$, $D'''\,D'$, l'esagono $D'\,A'\,D''\,B'\,D'''\,C'$, per il quale si considerino come equivalenti i lati $D'\,A'$ e $A'\,D''$, $D''\,B'$ e $B'\,D'''$, $D'''\,C'$ e $C'\,D'$ si può assumere a campo fondamentale di un gruppo G del tipo voluto.

Non esistono gruppi del tipo (γ). Infatti il poligono K sarebbe un dodecagono, sei vertici del quale sono vertici accidentali, sei non accidentali. Tra due vertici accidentali esisterebbe un vertice non accidentale, e viceversa. I due lati uscenti da un vertice non accidentale sarebbero equivalenti; e quindi gli altri 6 vertici formerebbero un unico ciclo. Sarebbe dunque $m = 1$ contro l'ipotesi.

Si puó pure dimostrare che non esistono gruppi del tipo (β). Infatti, in tal caso K sarebbe un ottagono, due vertici soltanto del quale godrebbero della proprietà che i due lati uscenti da uno di essi sono tra di loro equivalenti, mentre gli altri sei vertici formerebbero due cicli di vertici accidentali. E si riconosce facilmente che, in qualunque modo si facciano corrispondere i lati di K, non è possibile realizzare tali proprietà per i vsrtici di K.

Studiamo ora il tipo (C). Il poligono K è un decagono $A_1\,A_2$ .... A_{10}. Quattro e soli quattro vertici di K godono della proprietà che i due lati, uscenti da uno di essi, sono tra di loro equivalenti; gli altri 6 vertici di K si distribuiscono in due cicli di vertici accidentali. Due dei quattro vertici non accidentali di K non possono essere consecutivi; poichè K ha 10 vertici, vi saranno almeno due vertici non accidentali di K, p. es. A_1, A_3, che saranno separati da un solo vertice accidentale A_2. Se noi indichiamo con A_1, A_2, A_3, ... A_9 A_{10} i vertici di K, e se questi

ertici si seguono proprio nell'ordine qui scritto, i vertici A_2, A_4, A_{10} ormeranno necessariamente un ciclo di vertici accidentali; quindi lati $A_9\ A_{10}$ e $A_5\ A_4$ saranno equivalenti, i vertici A_5, A_9 saranno ure equivalenti, e quindi saranno vertici accidentali. Il ciclo di ertici, cui appartengono A_5, A_9 deve contenere un terzo vertice, he dovrà separare i due vertici residui non accidentali. Quindi A_5, A_7, A_9 formeranno il secondo ciclo di vertici accidentali; i unti A_6, A_8 saranno i due altri vertici non accidentali. I due ati uscenti da uno dei vertici non accidentali sono per diritto, erchè $l_i = 2$; la somma degli angoli nei vertici A_{10}, A_2, A_4 è guale a quattro retti; quindi i lati equivalenti, e perciò anche guali, $A_4\ A_5$ e $A_{10}\ A_9$ sono paralleli. Facciamo con cambiamenti eciti sparire i vertici accidentali. Le trasformazioni, che portano rispettivamente $A_{10}\ A_9$ in $A_4\ A_5$ e $A_2\ A_3$ in $A_3\ A_4$, portano rispettivamente i triangoli $A_{10}\ A_9\ A_1$ e $A_2\ A_3\ A_1$ in due triangoli equivalenti $A_4\ A_5\ A'_1$ e $A_3\ A_4\ A'_1$, tali che i segmenti $A_1\ A_2$, $A_3\ A'_1$ sono per diritto, e i segmenti $A_1\ A_9$, $A'_1\ A_5$ sono uguali, paralleli ed equivalenti. Se la trasformazione, che porta il primo di questi due segmenti nel secondo porta il punto A_8 in un punto A'_8, i triangoli $A_1\ A_9\ A_8$ e $A'_1\ A_5\ A'_8$, e i triangoli $A_8\ A_7\ A_6$, $A'_8\ A_5\ A_6$ sono equivalenti, i segmenti $A'_1\ A'_8$ ed $A_1\ A_8$ sono uguali e paralleli, i segmenti $A_6\ A_8$, $A_6\ A'_8$ sono uguali e per diritto. L'esagono $A_1\ A_8\ A_6\ A'_8\ A'_1\ A_3$ è il campo fondamentale cercato; i lati $A_6\ A_8$ e $A_6\ A'_8$, i lati $A_3\ A_1$ e $A_3\ A'_1$ sono per diritto; cosicchè questo esagono si può anche considerare come un parallelogrammo. Ed è ben evidente che, se $A_1\ A_8\ A'_8\ A'_1$ è un qualsiasi parallelogrammo, se A_3 ed A_6 sono i punti di mezzo di $A_1\ A'_1$ e $A_8\ A'_8$, l'esagono $A_1\ A_8\ A_6\ A'_8\ A'_1\ A_3$, per il quale si considerino come equivalenti i lati $A_3\ A_1$ e $A_3\ A'_1$, $A_6\ A_8$ e $A_6\ A'_8$, $A_1\ A_8$ e $A'_1\ A'_8$ definisce un gruppo della specie voluta.

Possiamo ancora osservare che, se A''_8 è il punto d'intersezione delle rette $A_1\ A_8$ e $A_3\ A'_8$, l'esagono $A_1\ A_8\ A_6\ A'_8\ A_3\ A''_8$ si può considerare pure come campo fondamentale per G. I lati $A_6\ A_8$ e $A_6\ A'_8$, $A_1\ A_8$ e $A_1\ A''_8$, $A_3\ A'_8$ e $A_3\ A''_8$ sono uguali e per

diritto. Siamo così ricondotti allo stesso tipo di campi fondamentali, che abbiamo trovato per i gruppi (B).

In sostanza noi abbiamo trovato che i gruppi di movimenti euclidei possibili sono ***i gruppi ciclici, i gruppi generati da due traslazioni indipendenti, e i gruppi*** (A), (B), (C), (***per cui è*** $m + n = q + 1$).

Si riconosce facilmente che se noi pieghiamo i lati di un campo fondamentale di questi gruppi, in guisa che punti equivalenti coincidano, otteniamo nel secondo caso una superficie di genere 1, nel terzo una superficie di genere zero. Un analogo procedimento applicato ai gruppi discontinui finiti porta soltanto a superficie di genere zero.

Osservazione. — Per essere completo, aggiungerò qui la determinazione, ottenuta recentemente dal Prof. G. Vitali, dei gruppi G pr. dis. di similitudini euclidee, ossia i gruppi pr. dis. di trasformazioni del tipo $x' = A\,x + B$. Di essi sono casi particolari i gruppi determinati più sopra, di movimenti euclidei: i quali sono caratterizzati da ciò che per tutte le loro trasformazioni è $|A| = 1$. Potremo dunque limitarci al caso che, almeno per una trasformazione S di G, sia $|A| \neq 1$. Mutando x in $x +$ cost., potremo ottenere che la S sia definita dalla $x' = A\,x$. Supponiamo ora che esista in G un'altra trasformazione T, definita da un'equazione $x' = \alpha\,x + \beta$, dove è $\beta \neq 0$. La trasformazione $S^n\,T^{-1}\,S\,T\,S^{-1}\,S^{-n}$ è definita dalla $x' = x + \dfrac{A^n \beta\,(A-1)}{\alpha}$ (n intero qualunque) e appartiene a G. Poichè $\beta \neq 0$, $|A| \neq 1$, $\alpha \neq 0$, questa trasformazione per n molto grande e positivo (se $|A| < 1$), o per n molto grande e negativo (se $|A| > 1$) sarebbe infinitesima. Il gruppo G non sarebbe p. d. t. i. Dunque tutte le trasformazioni S_i di G sono del tipo $x = a_i\,x$. Le trasformazioni corrispondenti sulla variabile $y = \log x$, insieme alla trasformazione $y' = y + 2\,\pi\,i$, generano un gruppo G' pr. dis. di traslazioni sulla variabile y. Poichè G contiene almeno una trasfor-

zione non ellittica, G' non può essere ciclico; e quindi (pag. 233) o ammetterà almeno un sistema di due traslazioni $y' = y + \alpha$, $= y + \beta$ (α, β costanti; $\frac{\beta}{\alpha}$ non reale) generatrici. Ed esisteranno e interi p, q tali che $p\alpha + q\beta = 2\pi i$. Se ρ è il loro massimo nun divisore, gli interi $p_1 = \frac{p}{\rho}$, $q_1 = \frac{q}{\rho}$ sono primi tra di loro; esisteranno due interi s_1, t_1 tali che $p_1 t_1 - q_1 s_1 = 1$. Posto $\alpha + q_1 \beta = \frac{2\pi}{\rho} i$, $s_1 \alpha + t_1 \beta = \gamma$, il gruppo G' ammetterà come sformazioni generatrici le $y' = y + \frac{2\pi}{\rho} i$, $y' = y + \gamma$; e il gruppo sarà dunque generato dalle

$$x' = \alpha x \ (\alpha = e^{\gamma}) \quad x' = e^{\frac{2\pi}{\rho} i} x.$$

Esso è il *gruppo ciclico, generato dalla trasformazione iperbo- a o lossodromica* $x' = \alpha x$, (se $\rho = 1$); oppure esso il *gruppo nerato dalla* $x' = \alpha x$, *e da una trasformazione ellittica a pe- do finito* ρ, che lascia fissi gli stessi punti $x = 0$, e $x = \infty$, e la precedente trasformazione porta in sè stessi.

§ 35. — Alcuni gruppi fuchsiani particolari.

Nel § 34 abbiamo dimostrato che a ogni gruppo finito G n ciclico e p. d. t. i. di trasformazioni lineari sulla x corri- onde una divisione della sfera in una rete di triangoli, che de della seguente proprietà:

Due triangoli adiacenti della rete sono trasformati l'uno del- ltro nella riflessione definita da lato comune; e formano, in- me considerati, un campo fondamentale K per G.

Abbiamo pure trovato al § 34, che esistono dei gruppi G d. t. i. di movimenti euclidei, ai quali corrisponde una divi- ne del piano *euclideo* in una rete di triangoli, che gode della ssa proprietà.

L'unica differenza sta in ciò che, mentre nel caso della sfera somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 2 retti, e riangoli sono in numero finito, nel caso invece del piano eu-

clideo la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti, i triangoli sono in numero infinito.

Sorge spontanea la domanda se esistano dei gruppi fuchsiani G, a cui corrisponda una divisione del piano iperbolico in una rete di triangoli, che soddisfi alla proprietà sopra enunciata. A questa domanda vogliamo ora rispondere. Cominciamo col ricordare che gli angoli di un triangolo della rete erano, nei due casi precedenti, sottomultipli di π. Altrettanto dovrà avvenire anche nel nostro caso, perchè o l'angolo A di un triangolo $A\,B\,C$ della nostra rete è nullo (il vertice A è all'infinito), oppure, se noi riflettiamo il triangolo $A\,B\,C$ attorno al lato $A\,B$, il nuovo triangolo $A\,B\,C_1$ così ottenuto attorno al lato $A\,C_1$, il nuovo triangolo $A\,C_1\,C_2$ ottenuto attorno al lato $A\,C_2$ e così via, si deve giungere a un triangolo $A\,C_{n-2}\,C_{n-1}$, il cui lato $A\,C_{n-1}$ coincide con $A\,C$; il triangolo, che si ottiene riflettendo $A\,C_{n-2}\,C_{n-1}$ attorno $A\,C$, coinciderà col triangolo $A\,C\,B$. Gli n triangoli così ottenuti sono alternativamente uguali e simmetrici; e, a due a due, formano un certo numero di campi fondamentali per G. I campi così ottenuti saranno trasformati l'uno nell'altro da quella trasformazione di G, che lascia fisso il punto A. Dunque n è un numero pari $2\,m$. Ora i nostri triangoli devono avere uguali gli angoli in A: questi angoli sono dunque uguali a $\frac{2\pi}{2\,m} = \frac{\pi}{m}$.

c. d. d.

Viceversa, se Δ è un triangolo del piano di Bolyai, i cui angoli sono sottomultipli di π, riflettiamo Δ attorno ai suoi tre lati; e così continuiamo a operare sui triangoli successivamente ottenuti. Evidentemente il piano di Bólyai sarà diviso in una rete di infiniti triangoli alternativamente uguali e simmetrici, che lo ricoprono una e una sola volta, e che noi diremo costituire una rete *fuchsiana* di triangoli.

Consideriamo ora due triangoli della rete, tra di loro adia-

centi, come un unico quadrangolo. Noi potremo evidentemente accoppiare gli altri triangoli della rete, in guisa che tutto il piano di Bólyai appaia diviso in una rete di quadrangoli tutti uguali al quadrangolo considerato. Quei movimenti (di prima specie), che trasförmano questo quadrangolo negli altri quadrangoli della rete, formano appunto un gruppo fuchsiano del tipo richiesto.

La costruzione dunque di tutti questi gruppi è per ciò ridotta alla costruzione di quei triangoli del piano di Bólyai, i cui angoli sono sottomultipli di π. Potremo dunque indicare gli angoli di uno di questi triangoli con $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \frac{\pi}{l_3}$ (l_1, l_2, l_3, interi). Ora è facile riconoscere che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista nel piano di Bólyai un triangolo Δ, i cui angoli sono α, β, γ, è che $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ (*).

(*) Che la condizione sia necessaria, si dimostra così. La condizione è evidentemente soddisfatta se i tre vertici del triangolo sono all'infinito, e quindi gli angoli corrispondenti sono nulli. Se ciò non è, rappresentiamo la metrica iperbolica conformemente nei punti interni a un cerchio L di un piano euclideo π, in guisa che un vertice A di Δ abbia per immagine il centro A' di L. Se B', C' sono i punti immagine in α degli altri due vertici di Δ, i lati di Δ avranno per immagine il segmento $A'B'$, il segmento $A'C'$, e l'arco di cerchio $B'C'$, che è interno a L, e che è posto sul cerchio passante per A', B' e intersecante L ad angolo retto. Gli angoli di Δ sono uguali ai corrispondenti del triangolo immagine, il quale, come si vede facilmente, è *interno* al triangolo rettilineo $A'B'C'$, e ha quindi degli angoli, la cui somma è inferiore a due retti.

Viceversa, siano $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$ tre angoli, di somma inferiore a π. Se $\alpha = \beta = \gamma = 0$, si prendano in un piano euclideo q tre cerchi qualunque tangenti a due a due; il triangolo Δ' da essi limitato ha gli angoli nulli, ed il cerchio L' che passa pei vertici ne taglia i lati ortogonalmente. Sia invece uno dei tre angoli diverso da zero: ad esempio sia $\alpha \neq 0$. Costruiamo nel piano q un quadrangolo $ABCD$, in guisa che i lati BC, CD siano uguali, gli angoli in A, B, D siano rispettivamente uguali ad α, $\frac{\pi}{2} + \beta$, $\frac{\pi}{2} + \gamma$. Sia BED l'arco di cerchio, interno al quadrangolo, di centro C e raggio $CB = CD$. Il triangolo Δ' che ha per lati i segmenti AB, AD e l'arco DEA ha gli angoli uguali agli angoli

Affinchè dunque, per una data terna di interi l_1, l_2, l_3, esista un gruppo G corrispondente, è necessario e sufficiente che $\Sigma \frac{1}{l_i} < 1$. Il quadrangolo poi, che servirà di campo fondamentale a G, contiene tre cicli di vertici, due dei quali sono formati di un solo vertice, mentre il terzo contiene due vertici opposti. L'ordine del sottogruppo di G, che lascia fisso un vertice di uno di questi tre cicli, è rispettivamente l_1, l_2 o l_3.

I risultati ottenuti per la metrica della sfera e del piano di Euclide o di Bólyai si possono anche considerare insieme da un unico punto di vista.

Sia Δ un qualsiasi triangolo $A\,B\,C$, a lati circolari, i cui angoli siano sottomultipli di π. Questi angoli saranno uguali a $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \frac{\pi}{l_3}$ dove l_1, l_2, l_3 sono tre numeri interi, non minori di 1. Noi potremo applicare ad $A\,B\,C$ una inversione per raggi vettori reciproci T, definita da un cerchio avente per centro quel punto O che è il secondo punto di intersezione dei cerchi $A\,B$, $A\,C$. Il triangolo Δ sarà trasformato in un triangolo $A'\,B'\,C'$, i cui angoli sono ordinatamente uguali agli angoli di Δ. I lati $A\,B$, $A\,C$ saranno trasformati nei segmenti *rettilinei* $A'\,B'$, $A'\,C'$: il lato $B\,C$ sarà trasformato nel lato $B'\,C'$, che sarà rettilineo o circolare. Se $B'\,C'$ è rettilineo, la somma degli angoli del triangolo $A'\,B'\,C'$, e quindi anche quella degli angoli del triangolo Δ sarà uguale a π; se $B'\,C'$ è circolare, esso potrà essere o interno,

---

richiesti. E si riconosce facilmente che esiste un cerchio L' *reale* di centro A, che taglia ortogonalmente il cerchio di centro C e raggio $CB = CD$. I lati di Δ' sono ortogonali al cerchio L'.

Ora la nostra metrica iperbolica è rappresentata conformemente entro un cerchio L di un piano euclideo π. Una rappresentazione simile di q su π, che faccia corrispondere a L' il cerchio L, porta il triangolo Δ' in un triangolo, che si potrà evidentemente considerare come l'immagine in π di un triangolo geodetico Δ del piano di Bólyai, che abbia gli angoli ordinatamente uguali ad α, β, γ. Ed è ben evidente che questo triangolo Δ è individuato a meno di movimenti di prima, o di seconda specie.

esterno al triangolo rettilineo, che ha per vertici i punti $A' B' C'$.
el primo caso la somma degli angoli del triangolo $A' B' C'$, e
uindi anche quella degli angoli di Δ è minore di 2 retti; il
unto A' è esterno al cerchio, a cui appartiene il lato circolare
$' C'$. E, se t è la lunghezza delle tangenti tirate da A' a questo
erchio, il cerchio *reale* L', che ha per centro il punto A' e per
ggio t, taglia ortogonalmente i tre lati del triangolo $A' B' C'$.
el secondo caso invece la somma degli angoli di Δ è supe-
ore a due retti; il punto A' è *interno* al cerchio, cui appar-
ene il lato $B' C'$, e quindi la lunghezza delle tangenti tirate
a A' a questo cerchio è una quantità *puramente immaginaria*
$\sqrt{-1}\,\lambda$. Il cerchio *immaginario* L' di centro A' e raggio $\sqrt{-1}\,\lambda$
a quindi un'equazione a coefficienti *reali*, e taglia ortogonal-
ente i lati di $A' B' C'$.

Studieremo separatamente i tre tipi ora distinti di triangoli Δ.

1. La somma degli angoli di Δ è uguale a π. Il triangolo
$' B' C'$ è un triangolo euclideo, da cui si può partire per co-
ruire una rete triangolare, che copre tutto il piano, eccetto che
punto a distanza infinita. Trasformando questa rete con la
asformazione T^{-1}, otteniamo una nuova rete di triangoli cir-
olari, a cui appartiene il triangolo $A B C$, tale che due trian-
oli adiacenti sono trasformati l'uno dell'altro nell'inversione
er raggi vettori reciproci definita dal lato comune. Questa rete
copre tutto il piano; eccetto un punto eccezionale O, attorno
ui si addensano infiniti triangoli della rete. I lati di tutti i
iangoli della rete passano per O.

2. La somma degli angoli di Δ è minore di π. Il cerchio L' è
alla T^{-1} portato in un cerchio *reale* L, che incontra ortogonal-
ente i tre lati di Δ. Il cerchio L divide il piano in due regio-
i, in una delle quali giace il triangolo Δ. Se in questa regione
he indicheremo con R) immaginiamo rappresentata conforme-
ente una metrica di Bólyai, il triangolo Δ sarà immagine di
n triangolo geodetico in questa metrica. Se quindi noi appli-
iamo a Δ le inversioni per raggi vettori reciproci definite dai

suoi lati, e così continuiamo per i nuovi triangoli, che se ne deducono, otterremo una rete fuchsiana di triangoli, che riempie una e una sola volta la region R.

3. La somma degli angoli di Δ è maggiore di π. In questo caso il cerchio L, trasformato di L' mediante la T^{-1}, è immaginario, pure avendo un'equazione a coefficienti reali. Il gruppo Γ generato dalle inversioni per raggi vettori reciproci definite dai lati di Δ trasforma L in sè stesso. Altrettanto avverrà quindi del gruppo G che in Γ è sottogruppo di indice 2 di trasformazioni lineari sulla x, che ha per campo fondamentale il quadrangolo, somma di Δ e di uno dei triangoli, che se ne deducono per una delle citate inversioni. In virtù dei risultati del § 30, vediamo che così si ritrovano semplicemente i gruppi discontinui finiti, da cui siamo partiti al principio del § 34.

In conclusione vediamo dunque che la considerazione ***delle più generali reti di triangoli a lati circolari, ricoprenti il piano, in tutto o in parte, una e una sola volta, e tali che due triangoli adiacenti della rete siano trasformati l'uno dell'altro nell'inversione per raggi vettori reciproci, definita dal lato comune, porta sempre in sostanza a gruppi di movimenti sulla sfera euclidea o sul piano euclideo, o sul piano di Bolyai.*** Naturalmente i gruppi trovati di movimenti della sfera euclidea si possono considerare anche come gruppi di movimenti nel piano ellittico.

Il precedente teorema non è più vero per reti di poligoni a più di tre lati. Su queste reti vogliamo però aggiungere qualche considerazione, che ci sarà utile nel seguito. Supponiamo di avere una rete N di poligoni P, che ricopra semplicemente una regione R del piano. Ogni poligono P abbia un numero finito di lati. Due poligoni adiacenti siano trasformati l'uno dell'altro nell'inversione per raggi vettori reciproci, definita dal lato comune. Come al solito si riconoscerà che ogni angolo dei nostri poligoni è sottomultiplo di π: e che due poligoni adiacenti di N insieme considerati formano un poligono K, che può servire di campo fondamentale ad un gruppo G di trasformazioni lineari,

r. dis. in N. Ogni altro campo equivalente a K sarà somma di due poligoni P adiacenti.

K non ha vertici accidentali. Infatti il prodotto delle inversioni per raggi vettori reciproci definite dai due lati di K, che passano per un vertice A di K, è una trasformazione non identica di G, che lascia fisso A.

Siano P_1, P_2 i due poligoni P, di cui K è somma, e sia l il lato comune; siano α_1, α_2 due lati di P_1, P_2 corrispondenti nell'inversione T definita da l. ***Questi due lati sono equivalenti rispetto a*** G. Se infatti U è l'inversione definita da α_1, allora la $T\,U$ è un'operazione di G, che porta α_1 in α_2.

Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i vertici di P_1, e siano $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \ldots, \frac{\pi}{l_n}$ gli angoli corrispondenti. Il lato l sia il lato contenente i vertici A_1, A_n. Siano $A'_2, A'_3, \ldots, A'_{n-1}$ i vertici di P_2, corrispondenti ad $A_2, A_3, \ldots, A_n$. I cicli di vertici di K saranno i seguenti: il ciclo formato dal solo vertice A_1, e quello formato dal solo vertice A_n; poi i cicli formati dai due vertici A_i, A'_i $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$. La somma degli angoli di K in uno degli n cicli sarà rispettivamente $\frac{2\pi}{l_1}, \frac{2\pi}{l_2}, \ldots, \frac{2\pi}{l_n}$.

Affinchè il gruppo G sia fuchsiano, è condizione ***necessaria*** (non ***sufficiente***) che (*):

$$\Sigma \frac{1}{l_i} < (n-2).$$

Viceversa, se l_i sono interi soddisfacenti a questa condizione, esiste (**) almeno un poligono P, i cui angoli sono ordinatamente

(*) Infatti ciascuno degli $n-2$ triangoli $A_1\,A_i\,A_{i+1}$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$ ha angoli, la cui somma, per quanto abbiamo detto al § 34, pag. 241, è inferiore a π; quindi la somma $\pi\,\Sigma\,\frac{1}{l_i}$ degli angoli di P è minore di $\pi\,(n-2)$.

(**) È facile infatti vedere che, se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono angoli, la cui somma è minore di $\pi\,(n-2)$, esiste almeno un poligono geodetico del piano di Bólyai, che ha gli angoli ordinatamente uguali ad $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Ciò ci è già noto nel caso che $n = 3$ (§ 34, pag. 241). Anzi dalla dimostrazione allora data segue che, se $n = 3$, e se teniamo fisso α_1, facendo

uguali a $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \ldots, \frac{\pi}{l_n}$, e al quale potremo applicare le precedenti considerazioni.

. . . .

variare α_2, α_3 in guisa che $\lim (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \pi$, allora i lati del triangolo corrispondente tendono a zero. Se invece, pur tenendo fisso α_1, facciamo tendere α_2, α_3 a zero, i lati del triangolo tendono a ∞. Per dimostrare il teorema in generale, useremo il metodo di induzione completa, scomponendo un poligono $A_1 A_2 \ldots A_n$ di n lati in due poligoni $A_1 A_2 A_3$ e $A_1 A_3 A_4 \ldots A_n$ mediante la diagonale $A_1 A_3$, e rivolgendo poi la nostra attenzione ai due poligoni parziali così ottenuti. Per illustrare questo procedimento, lo applicheremo al caso di $n = 4$. Si tratti cioè di costruire un poligono $A_1 A_2 A_3 A_4$, per cui siano prefissati i valori $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ dei 4 angoli ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 < 2\pi$). Cerchiamo di costruire perciò due triangoli $A'_1 A_2 A'_3$, $A''_1 A_4 A''_3$ tali che $A'_1 A_2 A'_3 = \alpha_2$, $A''_1 A_4 A''_3 = \alpha_4$, $A_2 A'_1 A'_3 + A_4 A''_1 A''_3 = \alpha_1$, $A_2 A'_3 A'_1 + A_4 A''_3 A''_1 = \alpha_3$, $A'_1 A'_3 = A''_1 A''_3$: se ciò sarà possibile, basterà avvicinare i due triangoli per modo che coincidano A'_1 ed A''_1, A'_3 ed A''_3 per trovare il quadrangolo cercato. Supponiamo, se possibile, che nel triangolo $A'_1 A_2 A'_3$ sia $A_2 A'_1 A'_3 = A_2 A'_3 A'_1 = h$. Gli angoli di $A'_1 A_2 A'_3$, $A''_1 A_4 A''_3$ saranno allora rispettivamente h, α_2, h; $\alpha_1 - h, \alpha_4, \alpha_3 - h$: perchè gli uni e gli altri possano essere angoli di un triangolo del piano di Bólyai basta che $2h + \alpha_2 < \pi$, e che $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2h < \pi$ ossia $h < \frac{\pi - \alpha_2}{2}$, $h > \frac{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 - \pi}{2}$. Queste disuguaglianze sono compatibili perchè $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 < 2\pi$. Se dunque scegliamo h positivo e soddisfacente a queste disuguaglianze, allora noi conosciamo gli angoli dei triangoli $A'_1 A_2 A'_3$, $A'_1 A_3 A'_4$ e noi possiamo costruire questi due triangoli. Siano δ_1, δ_2 le lunghezze del lato $A_1 A_3$ per questi due poligoni. Il nostro teorema sarà dimostrato, se proviamo che si può scegliere h in guisa che $\delta_1 = \delta_2$. Ora, se h tende a $\frac{\pi - \alpha_2}{2}$, allora $\lim \delta_1 = 0$, $\lim \delta_2 =$ quantità finita (per quanto abbiamo trovato più sopra per i triangoli del piano di Bólyai). Se $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 - \pi > 0$, allora, se h tende a $\frac{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 - \pi}{2}$, si ha $\lim \delta_1 =$ quantità finita, $\lim \delta_2 = 0$. Le quantità δ_1, δ_2 (sempre positive) sono funzioni continue di h. Esiste quindi almeno un valore di h, per cui $\delta_1 = \delta_2$. Se $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 - \pi < 0$, allora, se facciamo tendere h a zero, si ha $\lim \delta_1 = \infty$, $\lim \delta_2 =$ quantità finita. E ancora si può dimostrare il precedente risultato. E anche per il quadrangolo così costruito si riconosce facilmente che, se noi facciamo variare due suoi angoli, tenendo fissi gli altri, in guisa che $\lim \Sigma \alpha_i = 2\pi$, i lati del quadrangolo tendono a zero. Procedendo in modo affatto simile nel caso generale, si ottiene, come abbiamo detto, il teorema voluto.

PARTE TERZA.

APPLICAZIONI DEI GRUPPI DISCONTINUI ALLA TEORIA DELLE FUNZIONI

Capitolo Nono. — **Le funzioni di variabile reale, e le funzioni analitiche di una sola variabile.**

Comincieremo con l'enunciare di nuovo il problema fondamentale (A), già posto al § 17 (pag. 104) per le funzioni analitiche.

Dato un gruppo discontinuo G di trasformazioni su n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, e un gruppo isomorfo Γ di trasformazioni su m variabili $z_1, z_2, \dots, z_m$, si determinino tutti i possibili sistemi di funzioni z_i a un solo valore delle variabili x_j tali che, se le x subiscono le trasformazioni di G, le z subiscono le corrispondenti trasformazioni di Γ.

Se con T_ρ $(\rho = 1, 2, \dots)$ indico le trasformazioni di G, e con τ_ρ le corrispondenti di Γ, i sistemi di funzioni z_i cercati sono tutti e soli quelli che soddisfano al sistema di *equazioni funzionali*

$$\tau_\rho z_i(x_1, x_2, \dots x_n) = z_i(T_\rho x_1, T_\rho x_2, \dots, T_\rho x_n) \; (\rho = 1, 2, \dots) \; (i = 1, 2, \dots, m).$$

In altre parole nello spazio a $n + m$ dimensioni, in cui le x, z sono le variabili coordinate, le $z_i = z_i(x_1, \dots, x_n)$ rappresentano una varietà a n dimensioni, invariante per le trasformazioni

$$x'_j = T_\rho x_j \quad z'_i = \tau_\rho z_i \quad (j = 1, 2, \dots, n;\; i = 1, 2, \dots, m;\; \rho = 1, 2, \dots).$$

I problemi, che ci occupano, si possono quindi, sotto certi aspetti, considerare come caso particolare dei problemi generali della teoria delle equazioni funzionali.

Ricordo ancora che noi chiamiamo problema (B) quel caso particolare del problema (A), che se ne ottiene supponendo $m = 1$, e Γ ridotto alla sola trasformazione identica.

§ 36. — Le funzioni di variabile reale.

Il problema (A) e il problema (B) si possono studiare, tanto supponendo le x variabili reali, e quindi le z funzioni di variabile reale, quando supponendo le x variabili complesse, e quindi le z funzioni analitiche uniformi.

Supponiamo che le x siano variabili reali. In tal caso, se noi chiediamo solo che le z siano funzioni delle x nel senso *generale* di Dirichlet, i nostri problemi perdono ogni interesse, e sono di immediata risoluzione. Consideriamo uno spazio S, in cui le x sono variabili coordinate, e pensiamo in S un insieme P fondamentale per G (§ 24, pag. 143). Diamo alle z valori affatto arbitrarii in un punto di P. Se A è un punto qualunque di S, esisterà in generale una sola trasformazione T di G, che porta A in un punto A' equivalente di P. Se τ è la trasformazione di Γ, che corrisponde alla T, noi assumeremo come valori delle z nel punto A rispettivamente le quantità $\tau^{-1} z_1(A'), \ldots, \tau^{-1} z_m(A')$, dove con $z(A')$ indico i valori delle z nel punto A'. È perciò in generale necessario prefissare ulteriormente per le funzioni incognite z qualche speciale proprietà, se non si vuole essere condotti a problemi banali di immediata risoluzione e di nessun interesse.

Tra le condizioni, che si possono imporre alle z, vi è p. es. quella di soddisfare a date equazioni differenziali. Ma queste equazioni non possono essere scelte ad arbitrio. Per vedere con chiarezza questo punto importante, studiamo p. es. il caso del problema (B) in cui $m = 1$, e Γ si riduce alla sola trasformazione

identica; proponiamoci cioè di trovare una funzione z, invariante per un dato gruppo G, e soddisfacente a un'equazione differenziale $A(z) = 0$. Se noi trasformiamo le variabili indipendenti x con una trasformazione T_i di G, l'equazione differenziale $A(z) = 0$ si muterà in un'equazione $A_i(z) = 0$. E naturalmente la funzione cercata z, che è invariante per G, dovrà soddisfare anche alle equazioni $A_i(z) = 0$. Se l'equazione $A(z)$ non è scelta in modo particolare, il sistema delle $A(z) = 0$, $A_i(z) = 0$ sarà un sistema incompatibile, o avrà delle soluzioni banali, o avrà un integrale generale, che dipende da un numero finito di costanti arbitrarie, così che il problema proposto sarà generalmente non risolubile. Il caso più importante, che noi ci possiamo proporre è quello, in cui le $A(z) = 0$, $A_i(z) = 0$ si riducono a *una sola* equazione differenziale, ossia al caso che il nostro gruppo trasformi in sè stessa l'equazione $A(z) = 0$.

Tra le questioni più importanti, che si connettono a questo ordine di idee, ricorderò la costruzione delle superficie ad area minima, che sono trasformate in sè stesse da un gruppo di movimenti, e di cui è caso particolare notevole la ben nota superficie minima di Schwarz (*).

Noi non ci occuperemo però di questi e simili problemi, che ci porterebbero troppo lungi dalle questioni, a cui questo libro è dedicato. Ci volgeremo invece allo studio di alcuni casi particolari, che sono più intimamente legati alle teorie, che svilupperemo nei seguenti capitoli.

Sia dato un gruppo fuchsiano (o kleiniano) G su una variabile complessa $x = \xi + i\,\eta$. Una trasformazione T di un tale gruppo $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ trasforma chiaramente una funzione analitica della x in una nuova funzione analitica. Ora una trasformazione T sulla x individua chiaramente una trasformazione

(*) Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale* (2.ª ediz.). Tomo II, Cap. XXIII. — Cfr. anche Bianchi, ***Sulle superficie Fuchsiane. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei.*** **1888.**

reale sulle ξ, η: e alle trasformazioni del nostro gruppo G corrisponderanno delle trasformazioni ***reali*** sulle variabili ξ, η, le quali formeranno un gruppo, isomorfo a G, che noi indicheremo ancora con G, e ancora diremo fuchsiano (o kleiniano). Poichè ogni funzione armonica delle variabili ξ, η si può considerare come parte reale di una funzione analitica della x, e inversamente, è ben chiaro, per quanto abbiamo detto, che ogni trasformazione del nuovo gruppo G porta una funzione armonica delle ξ, η in un'altra funzione armonica, ossia trasforma in sè stessa l'equazione $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} = 0$.

E noi ci proporremo il problema:

Trovare le funzioni armoniche uniformi delle ξ, η, invarianti per il gruppo G fuchsiano (o kleiniano) sulla variabile $x = \xi + i\eta$.

Per risolvere questo problema, cominciamo a ricordare che, secondo le nostre convenzioni (§ 31, pag. 206), il gruppo G trasforma in sè stessa una rete di campi fondamentali sul piano π della variabile complessa $x = \xi + i\eta$. Sia R_0 uno di questi campi fondamentali. Supporremo che esso abbia un numero finito di vertici(*). Allora R_0 sarà limitato da cerchi; i cui vertici o saranno ***accidentali,*** oppure saranno lasciati fissi da una trasformazione ***ellittica*** o ***parabolica*** di G. Definiremo nel seguente modo l'***intorno*** di un punto A di R_0. Prendiamo una piccola curva σ, che circonda il punto A. Se il punto A non è lasciato fisso da alcuna trasformazione di G, oltre all'identità, l'area s limitata da σ si dirà un intorno di A. Sia invece A lasciato fisso da un sottogruppo g (ciclico) di G, generato da una trasformazione T ellittica o parabolica. Prendiamo una linea l qualunque, uscente da A, interna a R_0, e su essa un punto B vicino ad A. La T porterà l in una linea l' pure uscente da A, e B in un punto B'. Congiungiamo B con B' con un piccolo tratto di linea σ, non intersecante nè l,

(*) La necessità di questa condizione restrittiva per la immediata validità dei ragionamenti che seguono, è stata, a quanto io so, osservata esplicitamente per la prima volta dal Dott. E. Levi.

nè l'. Otterremo così un piccolo triangolo $A\,B\,B'$. Sia $A\,B'\,B''$ il triangolo trasformato di $A\,B\,B'$ per la T. Noi potremo evidentemente scegliere in infiniti modi la σ in guisa, che i lati $B\,B'$, $B'\,B''$ di questi triangoli formino una (unica) linea, che in ogni punto (e anche in B') abbia una tangente determinata variabile da punto a punto con *continuità* (*). Il triangolo $A\,B\,B'$ e i suoi equivalenti rispetto a g in numero finito (infinito) riempiono una regione, che contiene all'interno (sul contorno) il punto A, se T è ellittica (parabolica). Ogni punto di questa regione è rispetto ai gruppi g, G equivalente a un punto del triangolo $A\,B\,B'$. Noi diremo che ***il triangolo*** $A\,B\,B'$ ***è un intorno di*** A ***(rispetto al gruppo*** G***)***. Quando A è un punto lasciato fisso da una trasformazione non identica T di G, si suole generalmente riferirsi ad intorni di tipo particolare: si assume cioè come linea σ un cerchio trasformato in sè stesso dalla T. In altre parole, se T è una trasformazione parabolica

(1) $$\frac{1}{x'-\alpha}=\frac{1}{x-\alpha}+\gamma \text{ (se il punto } A \text{ è il punto } x=\alpha)(\gamma=\text{cost.}),$$

oppure

(2) $$x'=x+\gamma \quad \text{(se il punto } A \text{ è il punto } x=\infty) \ (\gamma=\text{cost.}),$$

si suole assumere a linea σ una linea rappresentata rispettivamente o dall'equazione:

(1)' $$I\left(\frac{1}{\gamma}\,\frac{1}{x-\alpha}\right)=h, \qquad (h=\text{cost. reale}) \ (**)$$

o dalla

(2)' $$I\left(\frac{x}{\gamma}\right)=h.$$

(*) Basta che σ abbia una tangente variabile con continuità, e che σ formi con l ed l' angoli supplementari.

(**) Secondo convenzioni già usate (pag. 108 e seg.) con $R(\mu)$ e $I(\mu)$ intendo la parte reale, e il coefficiente della parte immaginaria di una qualsiasi quantità complessa μ.

Una tale linea è infatti evidentemente un cerchio (o una retta), che, come un calcolo ben semplice dimostra, è trasformata in sè stessa dalla (1), o dalla (2). Se invece T è una trasformazione ellittica e se A è il punto $x = \alpha$ lasciato fisso dalla T e $x = \beta$ è l'altro punto lasciato fisso dalla T, la trasformazione T ha la forma

$$(3) \qquad \frac{x' - \alpha}{x' - \beta} = e^{\frac{2\pi i}{n}} \frac{x - \alpha}{x - \beta} \quad (n = \text{periodo di } T; \text{ cfr. § 30, pag. 188});$$

e noi assumeremo a linea σ il cerchio rappresentato dall'equazione

$$(3)' \qquad \left| \frac{x - \alpha}{x - \beta} \right| = h \qquad (h = \text{cost. reale}) \ (*)$$

Quest'equazione rappresenta un cerchio trasformato in sè stesso dalla T.

Si danno poi alle costanti h valori tali, che intorni di punti equivalenti per il nostro gruppo siano ancora equivalenti.

Se poi A è un punto, che nessuna trasformazione non identica di G lascia fisso, si suole assumere come linea σ un qualsiasi cerchio, a cui A sia interno; e ancora si scelgono generalmente questi cerchi, in guisa che intorni di punti equivalenti siano equivalenti.

Noi chiameremo poi ***variabile principale in un punto** A **di** R_0 **una variabile** t**, funzione della** x**, tale che un intorno di** A **abbia per immagine nel piano** π_A **della variabile complessa** t **un intorno*** (nel senso ordinario della parola) ***del punto*** $t = 0$. La definizione qui data di ***variabile principale*** lascia evidentemente a questa una grande indeterminazione: essa non porterà però alcuna ambiguità alle nostre deduzioni future, come il lettore potrà facilmente riconoscere in ogni caso.

(*) Questo vale, se α, β sono finite. Se invece $\beta = \infty$, o $\alpha = \infty$, la T sarebbe rispettivamente del tipo $x' - \alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}} (x - \alpha)$ o $x' - \beta = e^{\frac{2\pi i}{n}} (x - \beta)$, e come equazione di σ si assumerebbe la $|x - \alpha| = \text{cost.}$, o $|x - \beta| = \text{cost.}$ Si noti che è $\alpha \neq \beta$, poichè T è ellittica; se quindi $\alpha = \infty$ ($\beta = \infty$), è $\beta \neq \infty$ ($\alpha \neq \infty$).

Se $x = \alpha$, o $x = \infty$ è un punto A di R_0, non lasciato fisso da alcuna trasformazione non identica di G, noi potremo assumere come variabile principale rispettivamente la $t = x - \alpha$, o la $t = \frac{1}{x}$. In ogni altro punto A' equivalente ad A potrò poi assumere una tal variabile principale, che in punti equivalenti degli intorni di A, A' le corrispondenti variabili principali abbiano valori uguali.

Se $x = \alpha$ o $x = \infty$ è lasciato fisso dalla (1), o dalla (2), noi potremmo assumere come corrispondente variabile principale la

$$(1)'' \qquad t = k\, e^{\pm \frac{2\pi i}{\gamma} \frac{1}{x-\alpha}} \qquad (k = \text{cost.})$$

o la

$$(2)'' \qquad t = k\, e^{\pm \frac{2\pi i}{\gamma} x} \qquad (k = \text{cost.})$$

quando nell'esponente del secondo membro di queste formole si adoperi un segno tale che la parte reale di esso, quando x è interno a R_0, sia negativa.

Gli intorni precedentemente considerati del punto $x = \alpha$, o $x = \infty$, verranno rappresentati su un cerchio del piano π_A con centro nell'origine. Scegliendo convenientemente le costanti k si può poi fare in modo che in punti corrispondenti degli intorni di due punti equivalenti *le corrispondenti variabili principali abbiano valori uguali.*

Se A è un punto $x = \alpha$ lasciato fisso dalla (3), noi potremo assumere come relativa variabile principale la

$$t = k \left(\frac{x - \alpha}{x - \beta} \right)^n \qquad (k = \text{cost.}) \quad (*)$$

E ancora valgono considerazioni affatto simili alle precedenti.

Vogliamo ora definire gli *intorni di un punto A_1 di R_0 nel campo R_0*. Se il punto A_1 è interno a R_0, come intorni di A_1 in R_0

(*) Se $\alpha = \infty$, oppure $\beta = \infty$, si assumerà come variabile principale la $t = k\,(x - \alpha)^n$, oppure la $t = k\,(x - \beta)^{-n}$. (Cfr. la nota precedente).

si assumono quelli stessi, che abbiamo definito più sopra. Se invece A_1 cade sul contorno di R_0, esso sarà in generale equivalente ad altri punti del contorno di R_0. Siano $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ ($\nu \geq 1$) i punti del contorno di R_0, equivalenti ad A_1. I loro intorni rispetto al gruppo G, scelti nel modo sopra detto, sono equivalenti tra loro: e se noi scegliamo, secondo quanto abbiamo detto poc'anzi, le corrispondenti variabili principali, e sovrapponiamo i piani di queste variabili su un unico piano π_A, tutti questi intorni avranno per immagine in π_A uno stesso intorno circolare i dell'origine. Ora, se $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$ è un qualsiasi sistema di punti corrispondenti negli intorni dei punti $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, esisterà in generale in R_0 uno e un solo punto B a essi equivalente. Al variare dei punti B_i, questi punti B riempiranno una regione di R_0, in generale non connessa, somma di ν settori coi vertici nei punti $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, che noi chiameremo ***un intorno del punto*** A_i ($i = 1, 2, \ldots, \nu$) ***o anche del ciclo di punti*** $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ ***nel campo*** R_0. Questo intorno è rappresentato in π_A da un intorno circolare i dell'origine: l'origine è poi l'immagine di tutti i punti $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$.

Con questa nuova convenzione ogni punto A di R_0 ha in R_0 un intorno, formato tutto di punti appartenenti a R_0, e che nel piano della corrispondente variabile principale ha per immagine un cerchio, che ha per centro l'origine, immagine di A. E punti equivalenti di R_0 hanno per immagine uno stesso intorno.

Evidentemente passa una stretta analogia tra le nostre definizioni e quelle, che si pongono nella teoria delle superficie Riemanniane: anche su queste superficie per ogni punto A si definisce una variabile principale t tale che un intorno conveniente di A ha per immagine sul piano della variabile complessa t un'area circolare, il cui centro è l'immagine di A (*).

I ben noti teoremi di esistenza su una superficie F di Rie-

(*) C. Neumann, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*. Zweite Auf. (1884), § 14, pag. 94.

mann dimostrano che si può su F costruire una funzione armonica φ *non costante*, uniforme, dotata di una singolarità polare in un punto prefissato di F (*) tale che, se noi rappresentiamo i valori assunti da φ in un intorno α di un punto A di F nell'intorno α', che è immagine di α sul piano π_A della corrispondente variabile principale t, si ottenga in α' una funzione armonica uniforme (**).

Applicando ai nostri campi fondamentali gli stessi metodi, che si usano per stabilire il teorema di esistenza, or ora citato, su una superficie riemanniana, noi giungeremo a un risultato perfettamente analogo; e dimostreremo cioè che *esiste in R_0 una funzione φ armonica e uniforme che ha una singolarità polare in un punto prefissato A di R_0, in guisa che se noi rappresentiamo i valori assunti dalla φ in un intorno α di ogni altro punto A di R_0 nell'intorno α', che è immagine di α sul piano π_A della corrispondente variabile principale t, si ottenga in α' una funzione armonica uniforme e regolare.*

Riassumeremo qui, per maggiore chiarezza, la dimostrazione di questo teorema. Esso, come abbiamo detto, non è in fondo che la ripetizione della abituale dimostrazione dei teoremi di esistenza su una superficie di Riemann.

Costruiamo in R_0 un intorno per ciascun ciclo di vertici; e costruiamo poi degli intorni di un certo numero di coppie di punti equivalenti del contorno di R_0, in guisa che ogni punto del contorno di R_0 sia interno ad almeno uno di questi intorni. Siano $i_1, i_2, \ldots, i_h$ gli intorni così costruiti, e siano $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$ gli intorni corrispondenti nei piani delle relative variabili principali. Come segue da quanto abbiamo detto più sopra, gli intorni β si potranno ammettere circolari. Noi diremo che una funzione è armonica e regolare in i_s $(s = 1, 2, \ldots, h)$, se essa, considerata come funzione dei punti corrispondenti di β_s, è una funzione armonica e regolare in tutto β_s. Poichè in β_s sappiamo risolvere il problema di

(*) Si dice che una funzione armonica ha un polo in un punto A, se essa è parte reale di una funzione analitica, che ha in A una singolarità polare.

(**) C. Neumann, Loc. cit., cap. 18, pag. 432 e seg.

Dirichlet, di costruire una funzione armonica e regolare, che sul contorno di $\mathfrak{z}_s$ assume valori prefissi, noi sapremo pure costruire in i_s una funzione armonica e regolare, che sul contorno z_s di i_s assume valori prefissati. Costruite tali funzioni armoniche in modo generico per ciascuno degli intorni i, si applichi replicatamente il metodo alternato di Schwarz, fino a che si ottenga una funzione u continua e armonica in tutta la regione R' coperta dagli intorni i, e tale che, se noi rappresentiamo i valori assunti in $\mathfrak{x}_s$ nell'intorno corrispondente $\mathfrak{z}_s$, si ottenga una funzione armonica e regolare in $\mathfrak{z}_s$ $(s = 1, 2, \ldots, h)$. Sia poi R'' una regione connessa, interna a R_0, tale che ogni punto di R_0 sia *interno* ad almeno una delle due regioni R', R''. Se A $(x = x')$ è un particolare punto di R'', consideriamo una funzione U armonica e regolare in tutto R'', eccetto che nel punto A, dove diventa singolare come la parte reale di $\frac{1}{x - x'}$.

Se noi applichiamo di nuovo il metodo alternato alle funzioni u, U, otterremo una funzione φ armonica e continua in tutto R_0, che nel solo punto A ha una singolarità polare, e che in un intorno i_s assume valori, che soddisfano alle condizioni imposte dal precedente teorema di esistenza.

Del resto il nostro teorema di esistenza si potrebbe pure ridurre al classico *principio di minimo* di Dirichlet, precisamente come avviene dell'ordinario problema di Dirichlet per le funzioni armoniche.

Costruiamo ora in ogni altro campo fondamentale R_i una funzione φ_i, la quale in un punto di R_i abbia lo stesso valore, che φ_0 ha nel punto corrispondente di R_0. La funzione φ_i sarà chiaramente armonica in R_i.

Consideriamo ora due campi fondamentali adiacenti e supponiamo senz'altro che essi siano i campi R_0, R_1; sia l il lato comune. Io dico che la φ_1 *è entro* R_1 *quella funzione, che si ottiene prolungando analiticamente* φ_0 *oltre il lato* l.

Sia infatti A un punto *generico* di l e sia B quel punto del contorno di R_0, che è equivalente ad A. Sia $\mathfrak{x}$ un *intorno* (nel senso *ordinario* della parola) del punto A, e sia $\mathfrak{z}$ l'*intorno* di B, equivalente ad A. Siano $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{z}_1$ quei pezzi di $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ che sono interni a R_0. Le regioni $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{z}_1$, considerate come un'unica regione, sono un *intorno* di A nel campo R_0, quando si dia alla parola *intorno* il significato definito in questo stesso paragrafo. E se $\mathfrak{x}_2$ è quel pezzo di $\mathfrak{x}$, che è esterno a R_0, la funzione φ_1 assumerà in $\mathfrak{x}_2$ gli stessi valori, che φ_0 assume in $\mathfrak{z}_1$. Quindi, se noi rappresentiamo

la regione $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ in un intorno $\alpha' = \alpha'_1 + \alpha'_2$ (*) del punto $t = 0$ del piano π_A della variabile principale, corrispondente al punto A, e assumiamo come valore di una funzione ψ in un punto di α'_1 il valore di φ_0 nel punto corrispondente di α_1, e come valore di ψ in un punto di α'_2 il valore di φ_1 nel punto corrispondente di α_2, otteniamo una funzione ψ uguale alla funzione ψ_1, che si ottiene assumendo come valore di ψ_1 in un punto di α' il valore di φ_0 nel punto corrispondente di $\alpha_1 + \beta_1$. Ma, per il teorema sopra enunciato, la ψ_1 è una funzione armonica (e quindi continua con tutte le sue derivate, dotata al più di singolarità polari) in tutto α. Poichè $\psi = \psi_1$ la funzione uguale a φ_0 in α_1 ed a φ_1 in α_2 è continua con tutte le sue derivate in $\alpha_1 + \alpha_2$.

c. d. d.

Si può facilmente riconoscere che ragionamenti analoghi si possono ripetere anche per i vertici di R_0.

Dunque le funzioni φ_0, φ_1 si possono considerare come un'unica funzione φ in tutta l'area del piano x, che è ricoperta da quella rete di campi fondamentali (§ 31, pag. 203), a cui appartiene R_0: quindi in questa rete ***la φ è una funzione armonica, uniforme, non costante, invariante per il gruppo G***, dotata di una singolarità polare in un punto A prefissato di R_0 (e nei punti equivalenti). Il teorema di esistenza è così dimostrato.

Osservazione. — La condizione ammessa più sopra (pag. 206, 250), che G trasformi una rete in sè stessa è imposta dallo stesso nostro problema; in quanto che i punti limiti della rete sono punti singolari per la funzione armonica φ, la quale non esiste quindi fuori della rete considerata. Non avrebbe perciò alcun senso il richiedere che φ sia trasformata in sè stessa da una trasformazione, che porti un punto della rete in un punto esterno alla rete stessa.

(*) Indico con α'_1 e con α'_2 quei pezzi di α', che sono immagine rispettivamente di α e di α

Noi abbiamo visto nelle pagine precedenti che la dimostrazione del cercato teorema di esistenza equivaleva in sostanza alla dimostrazione del teorema analogo per le superficie Riemanniane. E abbiamo così cominciato a riconoscere l'intimo nesso che lega le teorie delle superficie di Riemann, e dei campi fondamentali. La scoperta di questo legame illumina di viva luce, come vedremo più avanti, tutta la teoria dei gruppi fuchsiani e kleiniani: essa è una delle più profonde concezioni del KLEIN. Il progresso della teoria delle funzioni algebriche in due o più variabili potrà forse un giorno contribuire similmente a una lucida visione della teoria delle funzioni automorfe di due o più variabili.

Con leggere modificazioni del metodo alternato si potrebbero dimostrare teoremi analoghi a quelli dimostrati sopra. Si potrebbe p. es. dimostrare la esistenza di funzioni armoniche dello spazio S euclideo a tre dimensioni, invarianti per un gruppo G pr. dis. di movimenti in S, p. es. per il gruppo G delle trasformazioni

$$x' = x + m\,a;\ y' = y + n\,b;\ z' = z + p\,c$$

dove x, y, z sono coordinate cartesiane ortogonali, a, b, c sono costanti del gruppo, m, n, p sono interi arbitrarii (*).

Tali funzioni armoniche furono costruite per la prima volta dall'Appell (**), che generalizzò allo spazio a tre dimensioni un metodo di Weierstrass.

Studii completamente analoghi si possono eseguire (***) per

(*) Le funzioni armoniche di S sono quelle che soddisfano alla $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0$. Questa equazione differenziale è evidentemente trasformata in sè stessa dal gruppo G.

(**) *Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation différentielle* $\Delta F = 0$. *Acta Mathem.*, tomo 4, pag. 313-317.

(***) Cfr. la Nota dell'A.: *Sulle funzioni armoniche che ammettono un gruppo discontinuo*, negli *Atti della R. Accad. di Torino.* 1902. Volume 37.

gli spazii a tre dimensioni a curvatura costante; ma tali studii ci porterebbero troppo lontani dal nostro scopo.

§ 37. — I teoremi di esistenza per funzioni analitiche nel caso $n = 1$.

I ben noti legami tra la teoria delle funzioni armoniche di due variabili reali ξ, η, e la teoria delle funzioni analitiche di una variabile complessa $x = \xi + i\eta$ ci fanno prevedere che i risultati ottenuti nel precedente paragrafo, potranno trovare applicazione alla dimostrazione dei teoremi di esistenza relativi ai problemi del § 17 nel caso $n = 1$. Ciò sarà confermato dal paragrafo attuale, dedicato appunto alla dimostrazione di tali teoremi di esistenza per via funzionale. Le condizioni, che noi supporremo soddisfatte in questo studio sono le seguenti due:

1. *che G sia un gruppo di trasformazioni lineari propriamente discontinuo (sia cioè un gruppo kleiniano o fuchsiano), e trasformi in sè stessa una rete N di campi fondamentali,*

2. *che un campo fondamentale di G abbia un numero finito di lati, e quindi in particolare abbia un ordine di connessione finito.*

La prima condizione è, per i teoremi del § 17, *necessaria* per la risoluzione del problema (B). Nulla è finora noto sulla risoluzione del problema (A), quando G non soddisfa a questa condizione.

I metodi, che esponiamo in questo paragrafo hanno il grande vantaggio di rendere intuitivi i teoremi di esistenza, ma presentano tre inconvenienti: 1. quello di non dare una espressione analitica delle funzioni, di cui dimostrano l'esistenza; 2. di ammettere la condizione che un campo fondamentale di G abbia un numero finito di lati; 3. di non essere generalizzabili a valori di n maggiori di 1.

I metodi degli sviluppi in serie di Poincaré, che noi esporremo più tardi, evitano tutti questi inconvenienti, ma introducono a loro volta, specialmente per quanto si riferisce al problema (A), altre condizioni restrittive.

Problema (*B*). — Cominciamo dunque a studiare il problema (*B*) quando $n = 1$. Il gruppo G è un gruppo di trasformazioni birazionali su una sola variabile x: esso è quindi un gruppo di trasformazioni lineari, che per le ipotesi fatte è pr. dis., ed anzi è un gruppo fuchsiano o kleiniano, che ha in N un campo fondamentale K dotato di un numero finito di vertici.

Posto $x = \xi + i\eta$, i risultati del § 36 dimostrano che esiste una funzione armonica reale $u^{(1)}$ delle due variabili reali ξ, η, invariante per il gruppo G e che in un punto prefissato A_1 di K presenta una singolarità polare. Costruiamo la funzione $v^{(1)}$ armonica coniugata di $u^{(1)}$ (che è definita a meno di una costante additiva). Evidentemente i valori che $v^{(1)}$ assume in punti corrispondenti di due campi fondamentali differiscono soltanto per una costante additiva; e quindi in particolare, se l_i, l'_i sono due lati equivalenti di K, i valori di $v^{(1)}$ in due punti equivalenti di l_i, l'_i differiscono solo di una costante $\alpha_i^{(1)}$. Siccome K ha un numero finito di lati, le coppie di lati l_i, l'_i sono in numero finito; noi le contraddistingueremo coi valori $i = 1, 2, \ldots, t$ dell'indice i (t intero finito). Di più, se K non è semplicemente connesso, esisteranno in K dei cammini chiusi C tutti interni a K, i quali non si possono con deformazione continua ridurre a un punto senza cessare di appartenere a K. Tra tali cammini esisterà, poichè K ha un numero finito di lati, un numero finito di cammini $C_{t+1}, C_{t+2}, \ldots, C_h$ ($h =$ intero finito) tali che ogni altro cammino C è riducibile con deformazione continua, e senza uscire da K, a una loro combinazione lineare. Indicheremo con $\alpha_{t+1}^{(1)}, \alpha_{t+2}^{(1)}, \ldots, \alpha_h^{(1)}$ le costanti, di cui aumenta $v^{(1)}$, quando si descrive uno dei cammini $C_{t+1}, C_{t+2}, \ldots, C_h$.

Scegliamo in K altri h punti $A_2, A_3, \ldots, A_{h+1}$ distinti tra loro e da A_1. Otterremo corrispondentemente h nuove coppie di funzioni armoniche coniugate $u^{(s)}, v^{(s)}$ ($s = 2, \ldots, h + 1$), ciascuna delle quali definirà un sistema di costanti $\alpha_i^{(s)}$ ($i = 1, 2, \ldots, h$).

Poniamo $u = \sum_{s=1}^{h+1} \beta_s u^{(s)}$, $v = \sum_{s=1}^{h+1} \beta_s v^{(s)}$, dove le β sono costanti.

Le u, v sono funzioni armoniche coniugate. Ora è sempre possibile trovare delle costanti β_s *non nulle*, tali che:

$$\sum_{s=1}^{h+1} \beta_s \alpha_1^{(s)} = \ldots = \sum_{s=1}^{h+1} \beta_s \alpha_h^{(s)} = 0.$$

Le funzioni u, v corrispondenti non saranno costanti; saranno ambedue uniformi in K; e in punti equivalenti del contorno di K avranno lo stesso valore. La $z = u + i v$ sarà una funzione di x in tutta la rete N, analitica uniforme e non costante, invariante per G. Il teorema di esistenza è così dimostrato.

Questa dimostrazione è affatto analoga a quella, con cui si dimostrano i teoremi di esistenza su una superficie di Riemann. Le funzioni $u^{(s)} + i v^{(s)}$ sono funzioni che godono di proprietà affatto analoghe a quelle degli integrali abeliani di seconda specie su una superficie di Riemann. Esse infatti hanno sole singolarità polari, e in punti equivalenti differiscono soltanto per una costante additiva. E, come sulle superficie di Riemann si possono ottenere le funzioni razionali con una combinazione lineare di integrali abeliani di seconda specie (*), così noi, combinando linearmente le $u^{(s)} + i v^{(s)}$, abbiamo ottenuto funzioni invarianti per G.

Proseguendo nella trattazione con metodi affatto analoghi a quelli usati nella teoria delle superficie Riemanniane, si dimostrerebbe che col metodo esposto si possono trovare due funzioni uniformi ζ_1, ζ_2 invarianti per il gruppo G, le quali sono legate da una relazione algebrica $f(\zeta_1, \zeta_2) = 0$ e sono tali che le funzioni uniformi di x, invarianti per G, sono tutte e sole le funzioni uniformi sulla superficie Riemanniana F, definita dall'equazione algebrica $f(\zeta_1, \zeta_2) = 0$. Se noi consideriamo come non distinti punti del piano π della variabile complessa x, equivalenti rispetto a G, i punti di F corrispondono biunivocamente ai punti di π. *Il genere di F si chiama genere di G.*

Noi per ora ammetteremo questi risultati, la cui dimostrazione *in extenso* troverà sede più opportuna nel paragrafo dedicato allo studio particolareggiato delle funzioni invarianti per un gruppo fuchsiano o kleiniano.

(*) NEUMANN. *Vorles. ü. Riem. Theor. der Ab. Int.*, pag. 258.

Osservazione. — I metodi qui esposti possono risolvere il nostro problema (B) anche nel caso che G non sia pr. dis.; ma in tal caso le funzioni z non saranno (e non potrebbero essere) uniformi (§ 17).

Problema (A). — Noi studieremo ora il problema (A) per il caso che $n = 1$ e che G sia un gruppo del tipo di cui ci siamo occupati ora e Γ sia un gruppo di trasformazioni lineari intere omogenee. E ci accontenteremo di dimostrare che esso si può ridurre al seguente problema, che è il celebre *problema di inversione di Riemann.*

Costruire m funzioni $z_1\, z_2 \ldots\, z_m$ di una variabile complessa x, le quali siano uniformi nell'intorno di ogni punto del piano della variabile x, eccettochè nell'intorno di s punti dati a priori $A_1, A_2, \ldots, A_s$. Sono pure date s trasformazioni lineari intere omogenee $T_1, T_2, \ldots\, T_s$ sulle variabili $z_1 \ldots z_m$. Si vuole che le z subiscano la trasformazione T_i, quando x descrive un giro chiuso attorno al punto A_i (*).

Siano ζ_1, ζ_2 due funzioni invarianti per G, tali che ogni altra funzione invariante per G sia una funzione uniforme sulla superficie Riemanniana F, immagine della relazione algebrica $f(\zeta_1, \zeta_2) = 0$, che lega le due funzioni ζ_1, ζ_2. I punti della F corrispondono, come dicemmo, biunivocamente ai punti del piano π della variabile complessa x, quando vi si considerino come non distinti punti equivalenti per G (**).

(*) Più precisamente, se O è un punto generico, ma fisso, del piano σ delle x ed $OA_1, OA_2, \ldots, OA_s$ sono dei tagli non intersecantisi, le z devono essere monodrome nel piano σ, su cui siano stati fatti i tagli precedenti, e devono subire le T quando si attraversino detti tagli. Naturalmente le T devono essere scelte in modo, che le z siano monodrome in O; cioè il prodotto delle T, prese in ordine conveniente, deve essere uguale a 1.

Per essere completi, noi dovremmo qui esporre come si risolva il problema di Riemann, e definire più precisamente quale comportamento si imponga alle z nei punti A. Due considerazioni ce ne hanno però dissuaso: l'una che questo problema rientra piuttosto nella teoria delle equazioni differenziali lineari alle derivate ordinarie; l'altra che la trattazione di tale problema ci costringerebbe a lunghe divagazioni: in quanto che dovremmo esporre la teoria delle equazioni integrali, la quale è troppo lontana dall'argomento del presente trattato. Il lettore, che voglia conoscere come si possa risolvere il citato problema di Riemann, consulti le ormai classiche ricerche di Hilbert sulle equazioni integrali nelle Göttinger Nachrichten (1904-1906).

(**) La F, o, ciò che è lo stesso, una superficie, i cui punti sono in

Supponiamo dapprima che il genere di F (che è per definizione il genere del gruppo G) sia nullo; esisterà in tal caso una funzione ζ_1 di x uniforme, tale che tutte e sole le funzioni uniformi di x, invarianti per G, sono funzioni uniformi di ζ_1. La superficie F coinciderà cioè col piano della variabile ζ_1. Eseguire su x una trasformazione di G equivale a far percorrere a ζ_1 un cammino chiuso nel suo piano (perchè la ζ_1 è invariante per G), e viceversa.

Cerchiamo ora di risolvere il problema generale (A) nelle ipotesi da noi fatte. Si dovranno trovare n funzioni $z_1, z_2 \ldots, z_n$ uniformi della x, le quali, quando la x subisce le trasformazioni del gruppo G di genere zero, subiscono le trasformazioni lineari intere omogenee di un dato gruppo Γ isomorfo a G. Se noi pensiamo le $z_1, z_2, \ldots, z_n$ come funzioni di ζ_1, esse saranno dunque funzioni, le quali, quando ζ_1 descrive un cammino chiuso nel suo piano σ, subiscono una *data* trasformazione lineare intera omogenea, variabile col cammino descritto dalla ζ_1, e generante un *dato* gruppo Γ. Il fatto che Γ è isomorfo a G equivale all'altro che, se ζ_1 compie un piccolo giro attorno a un punto generico del suo piano, le z devono subire la trasformazione identica, o, più generalmente, che, se ζ_1 compie un giro chiuso nel suo piano, a cui corrisponde un cammino chiuso nel piano della x, le z subiscono la trasformazione identica. I punti di diramazione delle z, considerate come funzioni della ζ_1, saranno quei punti A del piano di questa variabile ζ_1, che sono immagine di un ciclo di vertici non accidentali di K, e sono quindi *in numero finito*. E per definire quali trasformazioni subiscano le z, quando la ζ_1 percorre nel suo piano dei cammini chiusi, basterà definire quali trasformazioni subiscano le z per un giro chiuso attorno a uno dei citati punti A (*).

Ora la costruzione di funzioni z di una variabile ζ_1, che subiscono determinate trasformazioni lineari, quando ζ_1 compie dei giri attorno a certi punti A del suo piano, supposti in numero finito, è appunto *il problema di inversione di Riemann.*

c. d. d.

Passiamo ora al caso che il genere di G sia maggiore di zero. In tal caso la superficie Riemanniana F avrebbe l'ufficio, che nel problema pre-

---

corrispondenza biunivoca coi punti della F, si può ottenere quindi piegando un campo fondamentale K di G, in guisa che punti equivalenti del contorno di K vengano a coincidere.

(*) Si noti che l'isomorfismo tra Γ e G impone a queste trasformazioni l'unica condizione che il loro prodotto deve essere uguale all'identità. Ciò esprime il fatto che un giro della ζ_1 attorno a tutti i punti A contemporaneamente equivale a un giro della ζ_1 attorno a un punto che non sia di diramazione, ossia a un giro chiuso della x nel suo piano.

cedente aveva il piano σ della variabile ζ_1. Noi potremmo dunque cercare di risolvere il nostro problema, generalizzando le ricerche di Hilbert dal piano alle superficie Riemanniane, ossia cercando di determinare m funzioni z dei punti A di una superficie Riemanniana F, ***le quali subiscono date trasformazioni di un gruppo*** Γ, ***quando il punto*** A ***di*** F ***descrive un cammino chiuso su*** F.

Noi dimostreremo invece che questo problema si può ridurre al problema analogo, risoluto da Hilbert nel caso del piano. Sia, come sopra, $f(\zeta_1, \zeta_2) = 0$ l'equazione algebrica corrispondente alla superficie F; se r è il grado di f nella variabile ζ_2, noi considereremo F come formata di un certo numero r di piani (fogli) ζ_1 sovrapposti e tra loro collegati nei punti di diramazione della ζ_2, pensata come funzione algebrica di ζ_1. Sia A un punto generico del piano σ della variabile ζ_1. Sia A_1 il punto corrispondente del primo degli r fogli di F, e siano $A_2, A_3, \ldots\ldots, A_r$ i punti degli altri fogli sovrapposti ad A_1. Siano $z_1 \ldots\ldots z_m$ rispettivamente gli elementi (nel senso di Weierstrass) delle funzioni analitiche (*) z in un intorno di A_1; in questo intorno le $z_1 \ldots\ldots z_m$ si potranno considerare come funzioni analitiche uniformi di ζ_1. Siano $C_2, C_3, \ldots\ldots, C_r$ $r-1$ cammini su F, che conducono dal punto A_1 rispettivamente ai punti $A_2, A_3, \ldots\ldots A_r$. A questi cammini corrispondono sul piano σ della ζ_1 dei cammini chiusi $\gamma_2, \gamma_3, \ldots\ldots \gamma_r$ uscenti dal punto A e terminati al punto A. Se noi prolunghiamo analiticamente gli elementi $z_1 \ldots\ldots z_m$ lungo γ_i $(i = \ldots\ldots, r)$, noi otterremo in un intorno del punto A nuovi elementi di funzioni analitiche $z_{(i-1)m+1}, z_{(i-1)m+2}, \ldots\ldots, z_{im}$. Otterremo così in un intorno di A mr elementi di funzioni analitiche $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_{mr}$; e gli elementi $z_{(i-1)m+1} \ldots\ldots z_{im}$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots, r)$ rappresentano le funzioni z in un intorno del punto A_i di F; e, se $i > 1$, sono più precisamente quegli elementi, che si ottengono prolungando analiticamente gli elementi $z_1, \ldots\ldots, z_m$ dal punto A_1 al punto A_i lungo C_i. Facciamo ora descrivere al punto A nel piano σ un qualsiasi cammino chiuso γ. Il punto A_i $(i \leq r)$ andrà in un altro dei punti $A_1 \ldots\ldots A_r$, p. es. nel punto A_k $(k < r)$. Se noi ad A facciamo percorrere prima il cammino γ, poi il cammino γ_k percorso in senso inverso (ossia, come si suol dire, il cammino γ_k^{-1}) e quindi il cammino γ_i, il punto A_i andrà prima in A_k, poi in A_1, per ritornare finalmente in A_i e percorrere quindi in conclusione su F un cammino chiuso (**). Per

(*) *Elemento* di una funzione analitica z in un punto non è che una serie di potenze, che è convergente in un intorno di questo punto, e vi rappresenta la z.

(**) Per simmetria indicheremo con γ_1 un cammino chiuso che, partendo da A ritorni in A, così che il punto A_1 corrispondente di F descriva un cammino che esca da A_1 e ritorni in A_1.

ipotesi è noto quale trasformazione lineare τ_i subiranno per questo cammino chiuso le funzioni, o gli elementi $z_{(i-1)m+1}, z_{(i-1)m+2}, \ldots, z_{im}$. Osserviamo ora che questa trasformazione τ_i è prodotto

α) della trasformazione, che gli elementi citati subiscono per il cammino γ,

β) della inversa della trasformazione, che gli elementi citati subiscono per il cammino γ_k,

γ) della trasformazione, che gli elementi citati subiscono per il cammino γ_i.

In altre parole la trasformazione, che $z_{(i-1)m+1}, \ldots, z_{im}$ subiscono per il cammino γ si ottiene, applicando a questi elementi dapprima la trasformazione lineare nota τ_i, quindi la trasformazione che esse subiscono quando si percorra γ_i in senso inverso (che è data evidentemente dalle $z'_{(i-1)m+s} = z_s$ per $s = 1, 2, \ldots, m$) e infine la trasformazione dovuta al cammino γ_k (la quale chiaramente porta z_s in $z_{(k-1)m+s}$). Si può quindi considerare come nota la trasformazione, che il cammino γ induce sulle $z_{(i-1)m+s}$ $(s < m)$ per ogni valore di i $(i \leq r)$; e quindi è nota la trasformazione lineare che $z_1 \ldots z_{rm}$ subiscono per ogni cammino chiuso γ sul piano della variabile ζ_1.

Gli elementi z_i $(i \leq r\,m)$ sono dunque in A gli elementi di $r\,m$ funzioni analitiche, esistenti in tutto σ, le quali per ogni cammino chiuso γ subiscono una *data* trasformazione lineare. Esse avranno dunque in σ dei punti di diramazione (in *numero finito*, perchè il nostro gruppo G ha un numero *finito* di vertici); un giro attorno a questi punti di diramazione produce sulle nostre funzioni una *data* trasformazione lineare, mentre un giro attorno a un qualsiasi altro punto di σ lascia le nostre funzioni inalterate. La costruzione in σ delle nostre $r\,m$ funzioni è ricondotta ancora al problema di inversione di Riemann sul piano.

Quindi è contemporaneamente *dimostrato* il teorema di esistenza relativo al problema (A), quando $n = 1$, G è un gruppo kleiniano il cui poligono fondamentale ha un numero finito di vertici, e Γ è un gruppo di trasformazioni lineari intere omogenee.

Capitolo Decimo. — **I teoremi di esistenza dedotti con metodi algoritmici.**

§ 38. — I gruppi discontinui finiti.

Per costruire una funzione invariante per un gruppo discontinuo *finito* G su certe variabili x, si considerino una qualsiasi funzione f_1 delle x, e le funzioni f_i $(i = 2, 3, \ldots\ldots)$, che se ne

deducono, applicando alle x successivamente le trasformazioni di G. Una funzione φ delle x, che sia uguale a una funzione simmetrica delle f_1, f_i, è evidentemente invariante per G.

D'altra parte gli stessi metodi, che più tardi troveremo per risolvere i nostri problemi fondamentali per gruppi infiniti, valgono, e diventano anzi affatto elementari per i gruppi discontinui finiti. Ciononostante noi vogliamo riprendere per un gruppo finito G il problema fondamentale (B) nel caso $n = 1$. Come risulta dal § 34 (pag. 238), G è di genere zero: esistono dunque, per i risultati del precedente capitolo, infinite funzioni Z invarianti per G, che in un campo fondamentale assumono una e una sola volta ogni loro valore. Due qualsiasi di queste funzioni sono legate tra di loro da un'equazione lineare; e tutte le funzioni invarianti per G sono funzioni uniformi di una qualunque di queste funzioni Z. Questi risultati si possono confermare direttamente nel seguente modo. Siano

$$x' = \frac{a_i x + b_i}{c_i x + d_i} \qquad (a_i d_i - b_i c_i = 1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho)$$

le ρ trasformazioni di G (ρ = intero finito). Se A, B sono due costanti qualunque, ogni trasformazione di G lascia invarianti i prodotti

$$Z_1 = h \prod_{i=1}^{\rho} \left(\frac{a_i x + b_i}{c_i x + d_i} - A\right) \quad Z_2 = k \prod_{i=1}^{\rho} \left(\frac{a_i x + b_i}{c_i x + d_i} - B\right) \quad (h, k = \text{cost.})$$

perchè ne permuta soltanto i fattori. Le Z_1, Z_2 si annullano rispettivamente soltanto nei punti equivalenti al punto $x = A$, e al punto $x = B$, e diventano infinite soltanto nei punti equivalenti al punto $x = \infty$. Già questi due prodotti ci offrono dunque l'esempio di funzioni invarianti per G, e assumenti in un campo fondamentale una sola volta il valore zero e il valore ∞. Il quoziente $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$ è pure una funzione invariante per G, che in un campo fondamentale K diventa una e una sola volta nulla o infinita, rispettivamente nel punto del campo, che è equivalente al punto $x = A$, o al punto $x = B$. Dimostreremo ora che

la Z assume in K una e una sola volta ogni altro valore: con un metodo analogo questo teorema si potrebbe dimostrare anche per Z_1, e per Z_2. Posto

$$\varphi(x) = h \prod_{i=1}^{\rho} [(a_i x + b_i) - A (c_i x + d_i)]$$

$$\psi(x) = k \prod_{i=1}^{\rho} [(a_i x + b_i) - B (c_i x + d_i)],$$

si ha

$$\varphi(x) - Z \psi(x) = 0.$$

Se noi consideriamo in questa uguaglianza la Z come parametro, e la x come incognita, otteniamo un'equazione di grado ρ. Quest'equazione è irriducibile. Infatti il suo primo membro contiene la Z al primo grado; se esso dunque si spezzasse in due fattori, uno di questi dovrebbe essere indipendente dalla Z, e dovrebbe quindi dividere $\varphi(x)$, $\psi(x)$: ciò che è assurdo, perchè evidentemente $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sono primi tra di loro.

Da una radice della nostra equazione si passa alle altre, applicandole le trasformazioni del gruppo G, come è ben evidente per la definizione stessa delle $\varphi(x)$, $\psi(x)$: le ρ radici della nostra equazione definiscono dunque ρ punti equivalenti rispetto a G. Al variare di Z, questo sistema di ρ punti descrive tutti i sistemi possibili di punti equivalenti; dando infatti a Z il valore $\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)}$, le radici della nostra equazione diventano appunto uguali o ad α, o a una quantità equivalente ad α. La Z assume dunque ogni suo valore; e i punti, in cui assume uno stesso valore, sono tra di loro equivalenti e viceversa. Da ció risulta appunto che in un campo K la Z assume una e una sola volta ogni suo valore. Se in due punti L, M una delle funzioni Z assume uno stesso valore, anche ogni altra funzione Z vi assume uguali valori. Se quindi Z', Z'' sono due funzioni Z, la Z' è una funzione razionale di Z'', e viceversa. Quindi Z' è una funzione lineare di Z''.

Le precedenti equazioni $\varphi - Z\psi = 0$ hanno ricevuto il nome di *equazioni dei poliedri regolari;* il loro studio è di grande interesse, specialmente nel caso che G sia il gruppo icosaedrico.

Si dimostra infatti che la risoluzione dell'equazione più generale di 5.° grado si può ridurre alla risoluzione dell'equazione icosaedrica (*). Noi non ci occuperemo nè di questo studio, nè delle generalizzazioni per $n > 1$; in quanto che si entrerebbe in un ordine di ricerche puramente algebrico, e intimamente

(*) La ragione intima di questo fatto non si può esporre senza ricorrere alle teorie di Galois. Ciononostante si può dare un'idea di uno dei metodi con cui si può dimostrare l'asserzione del testo. Sia G un gruppo icosaedrale, che trasformi in sè stesso un icosaedro regolare inscritto nella sfera della variabile complessa x. Noi potremo trasformare G in un gruppo simile, in modo che due vertici dell'icosaedro siano nei punti $x = 0$, $x = 2\cos\frac{2\pi}{5}$. Si trova con un calcolo elementare che così i 12 vertici dell'icosaedro sono i punti

$$\begin{array}{l} x = \infty,\ x = 0 \\ x = \varepsilon^r(\varepsilon + \varepsilon^4)\ (r = 1, 2, 3, 4, 5) \\ x = \varepsilon^r(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\ (r = 1, 2, 3, 4, 5) \end{array} \qquad \left(\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\ \mathrm{sen}\ \frac{2\pi}{5}\right).$$

Posto

$$f = x\prod_{r=1}^{5}[x - \varepsilon^r(\varepsilon + \varepsilon^4)]\,[x - \varepsilon^r(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)] = x(x^{10} + 11x^5 - 1),$$

l'equazione $f = 0$, considerata come un'equazione di dodicesimo grado avente una radice infinita, ha per radici gli affissi dei dodici vertici dell'icosaedro. In modo analogo si trova che, se si pone

$$H = -(x^{20} + 1) + 228(x^{15} - x^5) - 494x^{10},$$

l'equazione $H = 0$ ha per radici gli affissi dei punti, che si ottengono proiettando dal centro della sfera sulla sfera stessa i centri delle varie faccie. Ciascuno di questi 20 punti è vertice di 3 campi fondamentali; ciascuno dei vertici dell'icosaedro è vertice di 5 campi fondamentali. Il sistema degli indici dei primi 20 punti (ciascuno contato 3 volte) e il sistema degli indici dei 12 vertici (ciascuno contato 5 volte) saranno due sistemi di radici della nostra equazione icosaedrica, corrispondenti a due certi valori di Z. Con una trasformazione lineare su Z potremo fare in modo, che i valori di Z corrispondenti a questi due sistemi di radici sieno rispettivamente $Z = 0$, $Z = \infty$; cosicchè si avrà identicamente:

$$Z = h\frac{H^3}{f^5} \qquad (h = \mathrm{cost.}).$$

connesso con la teoria delle forme, e la teoria delle equazioni algebriche secondo Galois; le quali ricerche hanno già ricevuto numerose esposizioni sistematiche, e sono assai lontane dai problemi di indole trascendente, a cui è particolarmente riservata questa parte del presente trattato.

E, se noi poniamo $h = \frac{1}{12^3}$, la Z così definita assume, come un facile calcolo dimostra, il valore $Z = 1$ nei 30 punti che si ottengono proiettando sulla sfera dal suo centro i punti medii delle costole dell'icosaedro. L'equazione icosaedrale, scritta per disteso, assume così la forma:

$$(x^{20} - 228\,x^{15} + 494\,x^{10} + 228\,x^5 + 1)^3 - 12^3\,x^5\,(x^{10} + 11\,x^5 - 1)^5\,Z = 0.$$

Quando si ponga $T = x^{30} + 1 + 522\,(x^{25} - x^5) - 10005\,(x^{20} + x^{10})$, i 30 punti medii delle costole dell'icosaedro sono definiti dall'equazione $T = 0$.

Ora esistono 5 ottaedri regolari che hanno per vertici punti medii delle costole dell'icosaedro e che il gruppo G permuta tra di loro. E si trova che, posto

$$t_r = \varepsilon^{3r}\,x^6 + 2\,\varepsilon^{2r}\,x^5 - 5\,\varepsilon^r\,x^4 - 5\,\varepsilon^{4r}\,x^2 - 2\,\varepsilon^{3r}\,x + \varepsilon^{2r} \quad (r = 1, 2, 3, 4, 5)$$
$$W_r = -\varepsilon^{4r}\,x^8 + \varepsilon^{3r}\,x^7 - 7\,\varepsilon^{2r}\,x^6 - 7\,\varepsilon^r\,x^5 + 7\,\varepsilon^{4r}\,x^3 - 7\,\varepsilon^{3r}\,x - \varepsilon^r \quad (r = 1, 2, 3, 4, 5)$$

le equazioni $t_r = 0$, $W_r = 0$ hanno per radici gli indici dei vertici, e dei punti che si ottengono proiettando i centri delle faccie dello r^{esimo} di questi 5 ottaedri dal centro della sfera sulla sfera stessa.

Posto poi $Y_r = \frac{12\,f\,W_r}{H}\left(m + n\,\frac{12\,f^2\,t_r}{T}\right)$ $(m, n = \text{cost.})$, si deduce facilmente che dalle 60 trasformazioni di G le Y_r sono soltanto permutate tra di loro, e che esse sono le radici dell'equazione

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} & Z\,Y^5 + 5\,Y^3\left(8\,m^3 + 12\,m^2\,n + \frac{6\,m\,n^2 + n^3}{1 - Z}\right) + \\ & + 15\,Y\left(-4\,m^4 + \frac{6\,m^2\,n^2 + 4\,m\,n^3}{1 - Z} + \frac{3\,n^4}{(1 - Z)^2}\right) + \\ & + 3\left(48\,m^5 - 40\,\frac{m^3\,n^2}{1 - Z} + \frac{15\,m\,n^4 + 4\,n^5}{(1 - Z)^2}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Ecco un'equazione di 5.° grado, che evidentemente si sa risolvere, appena si sappia risolvere l'equazione icosaedrale. Ora si può dimostrare che ogni equazione di 5.° grado si può ridurre al tipo precedente. Se infatti

$$\text{(II)} \qquad y^5 + a_1\,y^4 + a_2\,y^3 + a_3\,y^2 + a_4\,y + a_5 = 0$$

§ 39. — Le serie di Poincaré.

In questo, e nei seguenti paragrafi del Cap. 10 ci proponiamo di esporre un secondo metodo per la dimostrazione dei teoremi di esistenza delle funzioni automorfe e zeta-automorfe. Si fa uso in questo metodo di serie, i cui termini si generano in modo tale, da apparire senz'altro chiaro che esse formalmente risolvono i nostri problemi (A), (B). La massima difficoltà, che si presenta, consiste nel cercare i caratteri di convergenza di queste serie. Tuttavia, e per la notevole generalità dei casi, in cui tale con-

---

è un'equazione di 5.° grado, si ponga $Y = \alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 y^2$. La Y soddisferà a un'altra equazione

$$\text{(III)} \qquad Y^5 + A_1 Y^4 + A_2 Y^3 + 5\alpha Y^2 + 5\beta Y + \gamma = 0,$$

trasformata dalla precedente. Le A_1, A_2 sono rispettivamente funzioni di 1.° e di 2.° grado delle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Risolvendo quindi un'equazione di 2.° grado, potrò ottenere che $A_1 = A_2 = 0$. Se poniamo poi

$$m = \frac{11\alpha^3\beta + 2\beta^2\gamma - \alpha\gamma^2 + \alpha\sqrt{\Delta}}{24(\alpha^4 - \beta^3 + \alpha\beta\gamma)},$$

(dove $\Delta = 108\alpha^5\gamma - 135\alpha^4\beta^2 + 90\alpha^2\beta\gamma^2 - 320\alpha\beta^3\gamma + 256\beta^5 + \gamma^4$),

$$Z = \frac{(48\alpha m^2 - 12\beta m - \gamma)^3}{64\alpha^3[12(\alpha\gamma - \beta^2)m - \beta\gamma]},$$

$$n = \frac{12\alpha^2 Z - 96\alpha m^3 - 72\beta m^2 - 6\gamma m}{114\alpha m^2 + 12\beta m + \gamma},$$

si dimostra col calcolo effettivo che l'equazione (III) diventa identica alla (I). Ma la risoluzione della (III) è equivalente alla risoluzione della (II); la (I) si sa risolvere, se si ammette risoluta l'equazione dell'icosaedro. Quindi la risoluzione della più generale equazione (II) di 5.° grado si sa effettuare, se si ammette risoluta l'equazione dell'icosaedro. Il teorema reciproco è pure vero.

Questi cenni sono un rapido sunto del Cap. VIII (§ 111 e seg.) della *Teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois* del Prof. BIANCHI. Il lettore troverà ivi tra l'altro svolti tutti i calcoli, da noi soltanto accennati, e vi troverà pure indicazioni bibliografiche.

ergenza risulta dimostrata, e per la uniformità che presentano ı questo metodo i casi di una o più variabili, e infine per la omoda espressione analitica delle funzioni costruite, che ci viene osì fornita, queste serie costituiscono una delle più importanti coperte nella teoria delle funzioni automorfe e una delle più geniali concezioni di Poincaré, che primo le diede (nel caso di $n = 1$).

Riprendiamo il problema fondamentale (A); e supponiamo che le trasformazioni di Γ godano della proprietà distributiva: che cioè, se $z'_i = \varphi_i(z_1, \ldots, z_m)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ è una trasformazione di Γ, si abbia identicamente

$$\varphi_i(y_1 + z_1, \ldots, y_m + z_m) = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_m) + \varphi_i(z_1, z_2, \ldots, z_m).$$

Questo avverrà p. es. se Γ è un gruppo di trasformazioni lineari intere omogenee, o in particolare se Γ si riduce alla sola trasformazione identica.

Al solito indicherò con T_i $(i = 1, 2, \ldots)$ le trasformazioni di G, e con τ_i le trasformazioni corrispondenti di Γ. Con $D_i(x)$, o con $\frac{d(T_i x)}{d x}$ indicherò il Iacobiano delle $T_i x_1, T_i x_2, \ldots, T_i x_n$ rispetto alle x, e con $f_1, f_2, \ldots, f_m$ delle funzioni uniformi delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se p è un intero qualsiasi, noi indicheremo con $\xi_i(f_1, f_2, \ldots, f_m, p, x)$ oppure, più brevemente, con $\xi_i(p, x)$, o con $\xi_i(x)$ la serie

$$(4) \qquad \xi_i(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu^{-1} f_i(T_\nu x)\, D_\nu^p(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (*)$$

(*) Con $f_i(T_\nu x)$ indico la $f_i(T_1 x, T_2 x, \ldots, T_n x)$; con $\tau_\nu^{-1} f_i(T_\nu x)$ indico la quantità che si ottiene, applicando alle f_i la τ_ν^{-1}; se cioè $y'_i = \varphi_i[y_1, y_2, \ldots, y_m]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ è la trasformazione τ_ν^{-1}, si è posto

$$\tau_\nu^{-1} f_i(T_\nu x) = \varphi_i[f_1(T_\nu x), f_2(T_\nu x), \ldots, f_m(T_\nu x)].$$

Si è scritto poi che ν varia da 0 a ∞, perchè supponiamo senz'altro che G sia un gruppo discontinuo *infinito*. All'indice ν dovremmo invece far percorrere un numero finito di valori, se G fosse un gruppo discontinuo *finito*.

Prescindendo per ora dalle questioni di convergenza studiamo le proprietà formali delle serie (4). Se T_λ è una trasformazione *fissa* di G, avremo:

$$\xi_i(T_\lambda x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu^{-1} f_i(T_\nu T_\lambda x) \left[\frac{d(T_\nu T_\lambda x)}{dx}\right]^p \left[\frac{dx}{d(T_\lambda x)}\right]^p,$$

ossia, poichè per ipotesi le τ_ν, τ_ν^{-1} sono operazioni distributive:

$$\xi_i(T_\lambda x) = \tau_\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} (\tau_\nu \tau_\lambda)^{-1} f_i(T_\nu T_\lambda x) \left[\frac{d(T_\nu T_\lambda x)}{dx}\right]^p [D_\lambda(x)]^{-p}.$$

Al variare di ν da 0 a ∞, tanto le trasformazioni T_ν, che le $T_\nu T_\lambda$ (τ_ν che le $\tau_\nu \tau_\lambda$) descrivono uno stesso insieme di trasformazioni: le trasformazioni di G (di Γ).

E dalle uguaglianze precedenti si trae perciò:

$$(5) \qquad \xi_i(T_\lambda x) = [\tau_\lambda \xi_i(x)] [D_\lambda(x)]^{-p}.$$

Infatti, per quanto abbiamo detto, le serie

$$\Sigma (\tau_\nu \tau_\lambda)^{-1} f_i(T_\nu T_\lambda x) \left[\frac{d(T_\nu T_\lambda x)}{dx}\right]^p, \qquad \Sigma \tau_\nu^{-1} f_i(T_\nu x) \left[\frac{d(T_\nu x)}{dx}\right]^p$$

non differiscono che per l'ordine dei termini; e, da un punto di vista puramente formale, rappresentano una stessa funzione.

Il numero p si dice grado delle serie ξ. Avremo dunque:

Le serie $\xi_1 \dots \xi_m$ di grado p definite dalle (4) subiscono, formalmente, la trasformazione τ_λ di Γ e restano di più moltiplicate per $(D_\lambda(x))^{-p}$, quando le x subiscono la trasformazione T_λ di G.

Nel caso che Γ sia ridotto alla sola trasformazione identica, potremo porre $m = 1$; le $f_1 \dots f_m$ si ridurranno a una sola funzione f: le serie ξ assumeranno una forma più semplice; noi le indicheremo allora con $\theta(f, p, x)$ o anche con $\theta(x)$. Avremo dunque:

$$(6) \qquad \theta(f, p, x) = \theta(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f(T_\nu x) D_\nu^p(x),$$

e la (11) diventerà

$$(7) \qquad \theta(T_\lambda x) = \theta(x) D_\lambda^{-p}(x).$$

Una serie θ resta moltiplicata per D_λ^{-p}, se le x subiscono una trasformazione T_λ di G.

Dai teoremi precedenti si deduce tosto:

Teorema I. — *Le funzioni* ζ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *che si ottengono dividendo le* $\xi_1 \ldots \xi_m$ *per una serie* θ *dello stesso grado subiscono almeno formalmente) la trasformazione* τ_λ *di* Γ, *quando le* x *subiscono la trasformazione* T_λ *di* G.

Teorema II. — *Il quoziente di due serie* θ *dello stesso grado rappresenta, almeno formalmente, una funzione invariante per* G.

Lo studio del problema (A) è così ridotto a ricercare:

1. quando le serie (4), (6) sono assolutamente convergenti (indipendentemente dall'ordine dei termini).

2. quando le serie (4), (6) rappresentano effettivamente delle funzioni analitiche uniformi: ciò che avviene, se p. es. esse sono uniformemente convergenti nell'intorno di un punto generico.

3. se esistono delle serie θ, ξ non identicamente nulle.

4. se esistono due serie θ dello stesso grado, che non differiscono soltanto per un fattore costante.

Osservazione I. — Se la condizione 4 non fosse mai soddisfatta, il teorema II sarebbe illusorio, in quanto che dimostrerebbe soltanto che una funzione costante è invariante per il gruppo G. L'analogo vale per la condizione 3.

Osservazione II. — Per dimostrare poi (cfr. § 17, pag. 104) l'esistenza di n funzioni indipendenti invarianti per G, dovremo ancora approfondire lo studio delle funzioni, cui si riferisce il teorema II.

Daremo ora alcuni teoremi, che ci serviranno per lo studio della convergenza delle serie θ. Posto $x_k = \xi_k + i\,\eta_k$, noi indicheremo con S_{2n} lo spazio euclideo a $2\,n$ dimensioni, in cui le ξ, η sono coordinate cartesiane ortogonali. A ogni sistema di valori per le x corrisponde un punto reale in S_{2n} e viceversa. Noi potremo quindi parlare di un punto di S_{2n}, invece di parlare di un sistema di valori delle x.

Noi diremo che un gruppo G soddisfa *alle condizioni di Poincaré* se:

I. ***Il gruppo G possiede in S_{2n} almeno una rete N di campi fondamentali, che si possono tutti racchiudere (escluso al più un numero finito k di tali campi) in una ipersfera di raggio finito, o, più generalmente, se un intorno abbastanza piccolo α_0 di un punto generico A e gli intorni trasformati, escluso al più un numero finito di tali intorni, sono rinchiudibili in una ipersfera di raggio finito (anche variabile con A).***

II. ***Se α è un intorno sufficientemente piccolo di un punto generico A, nessuna trasformazione di G è singolare (*) in un punto B di α. Se B, C sono due punti di α, il rapporto dei valori del Iacobiano D_ν di una trasformazione qualunque T_ν di G nei punti B, C (escluso al più un numero finito di tali trasformazioni), è inferiore in valore assoluto a una costante finita H, indipendente dalla scelta della trasformazione T_ν in G e dei punti B, C in α.***

Osservazione. — Se $x'_{i\nu} = \varphi_{i\nu}(x_1 \ldots . x_n)$ $(i \leq n)$ è una trasformazione T_ν di G, e se $x_\rho = \xi_\rho + i\eta_\rho$; $x'_{\rho\nu} = \xi'_{\rho\nu} + i\eta'_{\rho\nu}$ $(\rho = 1, 2, \ldots, n)$, le ξ', η' sono funzioni delle ξ, η. Il Iacobiano Δ_ν di queste funzioni è dato da

$$\frac{d(\xi'_{1\nu} \ldots . \xi'_{n\nu}\, \eta'_{1\nu} \ldots . \eta'_{n\nu})}{d(x'_{1\nu} \ldots . x'_{n\nu}\, x^{0\prime}_{1\nu} \ldots . x^{0\prime}_{n\nu})} \times \frac{d(x'_{1\nu} \ldots . x'_{n\nu}\, x^{0\prime}_{1\nu} \ldots . x^{0\prime}_{n\nu})}{d(x_1 \ldots . x_n\, x^0_1 \ldots . x^0_n)} \times \frac{d(x_1 \ldots . x_n\, x^0_1 \ldots . x^0_n)}{d(\xi_1 \ldots . \xi_n\, \eta_1 \ldots . \eta_n)}$$

quando si convenga che le x, x^0 subiscano contemporaneamente trasformazioni immaginarie coniugate. Dunque Δ_ν è prodotto di tre fattori: il primo e l'ultimo $\frac{d(\xi'_\nu, \eta'_\nu)}{d(x'_\nu, x^{0\prime}_\nu)}$ e $\frac{d(x, x^0)}{d(\xi, \eta)}$ sono evidentemente inversi l'uno dell'altro. Il secondo fattore $\frac{d(x'_\nu, x^{0\prime}_\nu)}{d(x, x^0)}$ è uguale a $\frac{d(x'_\nu)}{d(x)}\,\frac{d(x^{0\prime}_\nu)}{d(x^0)} = D_\nu\, D^0_\nu$. Quindi

$$\Delta_\nu = D_\nu\, D^0_\nu = (\mathrm{mod}\ D_\nu)^2.$$

Da ciò si trae che *all'ultima parte della seconda delle due con-*

(*) Dico che una trasformazione $x'_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ è singolare in un punto B, se una delle funzioni φ_i è singolare in B, oppure se il Iacobiano delle φ_i è nullo nel punto B.

dizioni precedenti noi potremmo sostituire la seguente condizione, che le è affatto equivalente.

Se B e C sono due punti posti in un intorno α sufficientemente piccolo di un punto generico A, se $x'_{i\nu} = \varphi_{i\nu}(x_1 \ldots. x_n)$ è una qualsiasi trasformazione T_ν di G, se $\xi'_{i\nu}, \eta'_{i\nu}$ e ξ_i, η_i sono la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria delle $\varphi_{i\nu}$ e delle x_i, esiste una costante positiva, indipendente dalla trasformazione scelta in G, e dalla posizione dei punti B, C in α, tale che il rapporto dei valori, che il Iacobiano Δ_ν delle $\xi'_{i\nu}, \eta'_{i\nu}$ rispetto alle ξ, η assume nei punti B, C, è minore di detta costante per tutti i valori di ν, escluso al più un numero finito di valori di ν. Ne segue che nessun Iacobiano Δ_ν ha zeri in α.

Vale allora il seguente:

Lemma. — *Sia G un gruppo che soddisfi alle condizioni di Poincaré; e sia f una funzione uniforme nella regione R, coperta dalla rete N di campi fondamentali. Sia J l'insieme dei punti, che appartengono a un intorno α di un punto generico A, e a tutti gli intorni trasformati, escluso al più un numero finito di tali intorni.*

Se, scegliendo α abbastanza piccolo, la f è regolare in ogni punto limite dell'insieme J, allora, per $p \geqslant 2$, la serie $\theta(f, p, x)$ è uniformemente e assolutamente convergente in un intorno abbastanza piccolo α del punto generico A di R. E la funzione $\theta(x)$ è quindi una funzione analitica uniforme delle x in tutta R, e soddisfa all'equazione (7).

Sia infatti α_0 un intorno di un punto generico A di N; noi potremo supporlo così piccolo, che in esso sia soddisfatta la seconda condizione di Poincaré. Poichè G è in R pr. dis., noi potremo chiaramente prendere α_0 così piccolo che α_0 e gli intorni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots.$, trasformati di α_0 mediante le trasformazioni $T_1, T_2, T_3 \ldots.$ di G, non abbiano a due a due alcun punto comune. E di più, poichè A è un punto generico di R, potremo supporre (per le ipotesi fatte sui punti singolari della f) che i valori di f in uno qualsiasi degli intorni α_i (escluso al più un numero finito

di questi intorni) siano in modulo minori di una costante M, indipendente da i. Ora, se il punto (x) varia in α_0, il punto $(T_\nu x)$ varia in α_ν. E perciò, escluso al più un numero finito di valori per ν,

$$| f(T_\nu x) | < M.$$

Per dimostrare la convergenza assoluta e uniforme della (6) in α_0, basterà dunque dimostrare la convergenza assoluta e uniforme in α_0 della

$$\sum_0^\infty [D_\nu(x)]^p. \tag{8}$$

Osserviamo ora, che per la prima delle condizioni di Poincaré, si potrà trovare una ipersfera I di raggio abbastanza grande ma finito, che contenga tutti gli intorni α, escluso al più un numero finito di questi intorni, che noi indicheremo con $\alpha_{r_1}, \alpha_{r_2}, \ldots, \alpha_{r_k}$. Ora ogni termine $[D_\nu(x)]^p$ di (8) corrisponde a una trasformazione T_ν di G, e quindi a un intorno α_ν; noi escluderemo dalla (8) quei termini, per cui $\nu = r_1, r_2, \ldots, r_k$, ossia il cui intorno corrispondente non è interno alla I. La serie che noi otterremo si indicherà con $\Sigma' D_\nu^p(x)$; e basterà evidentemente dimostrare la convergenza assoluta e uniforme di quest'ultima serie, perchè essa si ottiene dalla (8) sopprimendo un numero *finito* di termini.

La somma dei volumi v_i degli intorni $\alpha_i (0 \leq i < \infty)$ $(i \neq r_1, r_2, \ldots r_k)$, che sono tutti interni a I e non hanno a due a due punti comuni, è finita; ossia la serie a termini positivi e costanti

$$\Sigma' v_\nu \, (\nu = 0, 1, \ldots) \; (\nu \neq r_1, r_2, \ldots, r_k)$$

è convergente. Ora

$$v_\nu = \iint \ldots \iint_{\alpha_\nu} d\xi_{1\nu} \, d\xi_{2\nu} \ldots d\xi_{n\nu} \, d\eta_{1\nu} \ldots d\eta_{n\nu}$$

dove l'integrale del secondo membro è un integrale $(2n)^{\text{uplo}}$, esteso all'intorno α_ν; e, poichè l'intorno α_ν è trasformato di α_0 mediante la trasformazione T_ν, si avrà:

$$v_\nu = \iint \ldots \iint_{\alpha_0} \Delta_\nu \, d\xi_1 \ldots d\xi_n \, d\eta_1 \ldots d\eta_n,$$

dove l'integrale $(2n)^{\text{uplo}}$ del secondo membro è esteso ad α_0.

Siano m_ν, M_ν il minimo e il massimo di $|D_\nu|$ in α_0; saranno m_ν^2, M_ν^2 il minimo e il massimo di $|\Delta_\nu|$, quindi

$$v_\nu > m_\nu^2 \iint \ldots \iint_{\alpha_0} d\,\xi_1 \ldots d\,\xi_n\, d\,\eta_1 \ldots d\,\eta_n,$$

ossia

$$v_\nu > m_\nu^2\, v_0.$$

Dalla convergenza della $\Sigma' v_\nu$ segue dunque la convergenza della $\Sigma' v_0\, m_\nu^2$ e quindi anche della $\Sigma' m_\nu^2$; ma, per la seconda condizione di Poincaré, $M_\nu < H m_\nu$, esclusi al più altri valori di ν in numero finito. Quindi anche la serie ΣM_ν^2 — ed a fortiori la serie ΣM_ν^p, se $p \geqslant 2$ — è convergente, se vi si sopprime un numero finito di termini. È quindi convergente la stessa serie ΣM_ν^p. Siccome M_ν è il massimo valore assoluto di D_ν in α_0, la serie ΣD_ν^p è in α_0 assolutamente e uniformemente convergente.

c. d. d.

Il presente *lemma* ci mostra la importanza, per le nostre ricerche, dei gruppi, che soddisfano alle condizioni di Poincaré. Noi troveremo ora alcune classi importanti di tali gruppi studiando separatamente i gruppi di movimenti e i gruppi lineari.

§ 40. — I gruppi di movimenti e i gruppi lineari.

I GRUPPI DI MOVIMENTI. — Io dirò che una metrica M, definita da una forma differenziale quadratica F sulle ξ_i, η_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, soddisfa alle *condizioni di Poincaré* se:

I. *I sistemi di valori delle* ξ, η, *per cui la metrica è regolare* (§ 23, pag. 140) *corrispondono a punti di* S_{2n}, *i quali riempiono una regione* Λ *posta a distanza euclidea finita; o almeno si può soddisfare a tale condizione sostituendo alle* x_i *nuove loro funzioni indipendenti. La distanza, nella metrica* M, *di due punti di* Λ *diventa infinita allora e allora soltanto che uno almeno di questi due punti si avvicina indefinitamente al contorno di* Λ.

II. *Data una qualsiasi costante δ, si può trovare un' altra costante D, tale che i valori del discriminante V di F in due punti di Λ, la cui distanza geodetica in M è minore di δ, hanno sempre un rapporto minore di D.*

Quando parleremo di metriche, che soddisfano alle condizioni di Poincaré, supporremo assai spesso *tacitamente* che le x siano già state scelte in guisa che sia proprio soddisfatta la prima parte della condizione I. Supporremo cioè che la regione Λ sia tutta posta a distanza euclidea finita in S_{2n}.

La precedente definizione si può anche estendere al caso che F non sia una forma quadratica, sostituendo al discriminante V di F un invariante qualunque V non assoluto della F, considerata come forma algebrica dei differenziali $d\xi$, $d\eta$. (Con ciò vogliamo dire che, se le $d\xi$, $d\eta$ subiscono una trasformazione lineare intera omogenea, V resterà moltiplicato per una potenza, a esponente non nullo, del determinante della trasformazione).

Teorema I. — *Se una metrica M soddisfa alle condizioni di Poincaré, ogni gruppo G. p. d. t. i. di movimenti in M soddisfa alle condizioni di Poincaré.*

Infatti G trasformerà in sè stessa la regione Λ, che, per ipotesi, è tutta posta a distanza finita nello spazio euclideo rappresentativo S_{2n}. In ogni punto di Λ, il gruppo G è pr. dis. (§ 20, pag. 126) e per i risultati del § 25 (pag. 152 e seg.) esso possiede un'unica rete N di campi fondamentali, che riempie Λ.

Ora il Iacobiano Δ di una trasformazione T del gruppo G è uguale alla radice quadrata del rapporto dei valori, che il discriminante V di M ha nei punti (x) e (Tx) ossia è uguale a $\sqrt{\frac{V(x)}{V(Tx)}}$. Ora sia α un intorno di un punto generico A, e sia α' l'intorno trasformato di α mediante la T. Sia B un punto di α, e B' il punto corrispondente in α'. Il valore del nostro Iacobiano in B è uguale alla radice quadrata del rapporto $\frac{V(B)}{V(B')}$ dei valori che V ha nei punti B, B'. Il rapporto dei valori del Iacobiano in due punti B, C di α è uguale perciò a $\sqrt{\frac{V(B)}{V(C)}} \sqrt{\frac{V(C')}{V(B')}}$

Sia ora δ la massima distanza geodetica di due punti B, C di α: poichè α' si ottiene da α con un movimento, la massima distanza geodetica di due punti di α' è pure uguale a δ. Quindi, poichè la nostra metrica soddisfa alle condizioni di Poincaré, esisterà una costante D, tale che $\left|\frac{V(B)}{V(C)}\right| \leq D$, $\left|\frac{V(C)}{V(B)}\right| \leq D$. E il rapporto dei valori del Iacobiano citato in due punti di α è inferiore a D.

c. d. d.

Teorema II. — *Le metriche di Bólyai a due dimensioni soddisfano alle condizioni di Poincaré.*

Noi sappiamo infatti che una tal metrica ha un elemento lineare $h^2 \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2}$ ($h = \text{cost.}$); e se S_2 è il piano euclideo in cui ξ, η sono coordinate ortogonali, essa viene rappresentata in modo conforme in quella regione di S_2 (tutta a distanza finita), che è interna al cerchio $\xi^2 + \eta^2 = 1$ (che rappresenta i punti a distanza geodetica infinita). La radice quadrata del discriminante V è $\frac{h^2}{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2}$. Ora, se indichiamo con r la distanza geodetica dal punto (ξ, η) al punto $(0, 0)$ si ha $\xi^2 + \eta^2 = \operatorname{tangh}^2 \frac{r}{h}$, cosicchè questa radice quadrata è uguale ad $h^2 \cosh^4 \frac{r}{h}$. Siano ora A, B due punti, la cui distanza geodetica è minore di δ. Se r, r_1 sono le loro distanze geodetiche da $(0, 0)$, sarà evidentemente $\left|\frac{r_1}{h} - \frac{r}{h}\right| < \frac{\delta}{h}$. Il rapporto Q dei valori di $\sqrt{V}$ nei punti A e B è uguale a

$$Q = \left(\frac{\cosh \frac{r}{h}}{\cosh \frac{r_1}{h}}\right)^4.$$

Se $r \geqq r_1$, sarà

$$1 \leq Q \leq \left[\frac{\cosh\left(\frac{r_1}{h} + \frac{\delta}{h}\right)}{\cosh \frac{r_1}{h}}\right]^4 = \left[\cosh \frac{\delta}{h} + \operatorname{senh} \frac{\delta}{h} \operatorname{tangh} \frac{r}{h}\right]^4 < \left[2 \cosh \frac{\delta}{h}\right]^4.$$

Se $r < r_1$, si ha $Q \leq 1$.

In ogni caso dunque si ha $Q^2 \leq D$, se $D = \left[2 \cosh \frac{\delta}{h}\right]^8$.

c. d. d.

TEOREMA III. — *Le metriche Hermitiane di tipo iperbolico soddisfanno alle condizioni di Poincaré.*

Il discriminante dell'elemento lineare di una metrica Hermitiana iperbolica è (§ 15, pag. 99) (*) a meno di un fattore numerico

$$\frac{1}{\left[\sum_1^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) - 1\right]^{2(n+1)}}$$

E considerando le ξ_i, η_i come coordinate cartesiane ortogonali in uno spazio euclideo rappresentativo a $2n$ dimensioni, i punti, ove la metrica è regolare, hanno per immagine i punti *interni* all'ipersfera $\sum (\xi_i^2 + \eta_i^2) = 1$.

E (§ 15, pag. 99) indicando con r la distanza geodetica dal punto $(\xi_1 \, \xi_2 \ldots . \xi_n \, \eta_1 \, \eta_2 \ldots . \eta_n)$ al punto $(0, 0 \ldots . 0, 0, \ldots . 0)$ si ha

$$\sum (\xi_i^2 + \eta_i^2) = \text{tangh}^2 \frac{r}{h} \qquad (h = \text{cost.}).$$

La dimostrazione si compie in modo analogo al precedente.

TEOREMA IV. — *Se* $A = \sum A_i$ *è una metrica mista*, (§ 6, pag. 29), *le cui metriche parziali* A_i *soddisfano alle condizioni di Poincaré, la metrica* A *soddisfa pure alle condizioni di Poincaré.*

Useremo le notazioni, adottate al § 16 (pag. 100). I punti, in cui A è regolare, hanno sugli spazii parziali per proiezioni dei punti, in cui le metriche A_i sono regolari. La regione, in cui A è regolare, ha su ciascun spazio parziale per proiezione una regione (in cui la metrica parziale corrispondente è regolare) tutta posta a distanza finita, perchè le metriche parziali soddisfanno

(*) Fedeli alle notazioni attuali, pensiamo qui a metriche Hermitiane a $2n$ dimensioni (a pag. 99 ci riferivamo a metriche a $2n - 2$ dimensioni).

alla prima condizione di Poincaré. La regione, in cui A è regolare, è quindi a distanza finita nello spazio totale. Indichiamo con V_i il discriminante di A_i, con V il discriminante di A; sarà $V = \prod_i V_i$. Ora, se due punti B, C hanno una distanza geodetica minore di δ, altrettanto avverrà *a fortiori* (§ 16, pag. 101) della distanza geodetica delle loro i^{esime} proiezioni B_i, C_i, misurata nella metrica A_i. Ora il rapporto Q dei valori di V in B e in C è uguale al prodotto dei rapporti Q_i dei valori di V_i in B_i e in C_i. Ma per ipotesi esiste una costante D_i, tale che $Q_i < D_i$. Quindi Q è minore del prodotto D delle costanti D_i.

c. d. d.

Dai precedenti teoremi si deduce quindi in particolare:

TEOREMA V. — *I gruppi fuchsiani, iperfuchsiani, iperfuchsiani misti soddisfano alle condizioni di Poincaré.* Infatti tali gruppi, considerati come gruppi di trasformazioni sulla parte reale e sul coefficiente della parte immaginaria delle variabili indipendenti sono, come risulta da quanto precede, gruppi di movimenti in una metrica, che soddisfa alle condizioni di Poincaré.

Le serie $\theta(f, p, x)$, relative a questi gruppi, sono perciò in un intorno α di un punto generico A assolutamente e uniformemente convergenti: basta supporre p. es. che la f non sia singolare in Λ, p. es. sia un polinomio delle x.

I GRUPPI LINEARI. — Studiati così i gruppi di movimenti ci volgeremo ai gruppi G di trasformazioni lineari, intere o fratte, cercando di vedere in quali casi un tale gruppo G soddisfa alle condizioni di Poincaré. Sia

$$x'_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + a_i}{\sum_{k=1}^{n} b_k x_k + b} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

una trasformazione lineare T sulle x. Calcoliamone il Iacobiano D.

Poniamo $z_i = \Sigma\, a_{ik}\, x_k + a_i$, $z = \Sigma\, b_k\, x_k + b$. Sarà

$$x'_i = \frac{z_i}{z}, \qquad \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \frac{1}{z}\frac{\partial z_i}{\partial x_k} - \frac{z_i}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x_k}.$$

Ora D è il determinante, in cui $\dfrac{\partial x'_i}{\partial x_k}$ è l'i^{esimo} termine della k^{esima} riga. Posto $\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z_i}{\partial x_k} = \beta_{ik}$: $\dfrac{z_i}{z^2} = \mu_i$: $\dfrac{\partial z}{\partial x_k} = \nu_k$ avremo:

$$(9) \qquad D = \begin{vmatrix} \beta_{11} - \mu_1 \nu_1 & \beta_{21} - \mu_2 \nu_1 \ldots\ldots \beta_{n1} - \mu_n \nu_1 \\ \beta_{12} - \mu_1 \nu_2 & \beta_{22} - \mu_2 \nu_2 \ldots\ldots \beta_{n2} - \mu_n \nu_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{1n} - \mu_1 \nu_n & \beta_{2n} - \mu_2 \nu_n \ldots\ldots \beta_{nn} - \mu_n \nu_n \end{vmatrix}.$$

Io dico che

$$D = (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_1\, \mu_2 \ldots\ldots \mu_n\, 1 \\ \beta_{11}\, \beta_{21} \ldots\ldots \beta_{n1}\, \nu_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{1n}\, \beta_{2n} \ldots\ldots \beta_{nn}\, \nu_n \end{vmatrix}.$$

Infatti sottraendo dalla ρ^{esima} riga ($\rho = 2, 3, \ldots, n + 1$) di questo determinante la prima riga moltiplicata per $\nu_{\rho-1}$ si ottiene un nuovo determinante, che, sviluppato secondo i termini dell'ultima colonna (tutti nulli, eccetto il primo), si riconosce effettivamente uguale al determinante del secondo membro della (9). Ritornando alle primitive notazioni, si trova dunque che

$$D = \frac{(-1)^n}{z^{n-1}} \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \ldots\ldots & z_n & z \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_1} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial z_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_n} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial z_n}{\partial x_n} & \dfrac{\partial z}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{z^{n-1}} \begin{vmatrix} z & z_1 & z_2 \ldots\ldots z_n \\ b_1 & a_{11} & a_{21} \ldots\ldots a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ b_n & a_{1n} & a_{2n} \ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Trasformiamo il determinante, che compare nel terzo membro di questa formola, sottraendo dalla prima riga la ρ^{esima} ($\rho = 2, 3, \ldots, n + 1$) moltiplicata per $x_{\rho-1}$. Troveremo

La costante c si può, moltiplicando tutte le costanti a, b per uno stesso fattore (ciò che non muta la T), ridurre uguale a $+1$.

Dunque la seconda condizione di Poincaré (§ 39, pag. 274) per un gruppo G di trasformazioni lineari si può enunciare, dicendo:

II'. ***In un intorno sufficientemente piccolo α di un punto generico A, il polinomio $\Sigma\, b_k x_k + b$, relativo a una qualsiasi trasformazione T di G non si annulla. Esiste una costante H tale che, per ogni trasformazione T di G*** (escluso al più un numero finito di queste trasformazioni) ***il rapporto dei valori di $\Sigma\, b_k x_k + b$*** in ***due punti B, C qualsiasi di α è in modulo minore di H. La costante H non varia al variare della T in G e dei punti B, C nell'intorno α.***

Trasformeremo ora, seguendo E. Levi, questa condizione, studiando il significato geometrico dell'espressione $\sum_{k=1}^{n} b_k x_k + b$; troveremo così che questa condizione II' è conseguenza della condizione I di Poincaré (pag. 274). Indicheremo con S_n uno spazio, in cui le x siano coordinate; mentre, posto $x_k = \xi_k + i\,\eta_k$, continueremo ad indicare, come al principio di questo paragrafo, con S_{2n} uno spazio, in cui le ξ, η sono coordinate cartesiane ortogonali. Vi è una corrispondenza biunivoca tra i punti reali e complessi di S_n e i punti reali di S_{2n}, quando si faccia la convenzione di considerare i punti all'infinito di S_{2n} come formanti una varietà L_∞ a $2(n-1)$ dimensioni. Questa convenzione non deve stupire: infatti per $n = 1$, S_{2n} si riduce al piano, immagine della variabile complessa x_1; ed è ben noto che il piano di una variabile complessa si considera come avente un unico punto a distanza infinita. Ora S_n possiede appunto ∞^{n-1} punti reali e complessi a distanza infinita: i punti

di S_{2n}, che ne sono immagine, si devono quindi considerare come formanti una varietà L_∞ a $2(n-1)$ dimensioni ***reali***.

I punti per cui $\Sigma b_k x_k + b = 0$ sono evidentemente portati dalla T in L_∞. Quindi essi costituiscono la varietà [a $n-1$ dimensioni complesse, ossia a $2(n-1)$ dimensioni reali] trasformata di L_∞ mediante T^{-1}. Questa varietà è un iperpiano in S_n; se $b_k = \beta_k + i\gamma_k$, essa ha in S_{2n} per equazioni

$$(10) \qquad \Sigma(\beta_k \xi_k - \gamma_k \eta_k) + \beta = 0$$

$$(11) \qquad \Sigma(\beta_k \eta_k + \gamma_k \xi_k) + \gamma = 0$$

ossia è una varietà *lineare* $S_{2(n-1)}$ a $2(n-1)$ dimensioni.

Chiameremo *varietà* L questi $S_{2(n-1)}$.

Se $n = 1$, questa varietà è evidentemente un punto (il punto trasformato del punto all'infinito mediante la T^{-1}). Infatti l'equazione $\Sigma b_k x_k + b = 0$ si riduce alla $b_1 x_1 + b = 0$, che determina la x_1.

Preso ora un punto qualsiasi $(x_1 \ldots . x_n)$, quale è il significato dell'espressione $\sum_k b_k x_k + b$? Se $b_1 = \ldots . = b_n = 0$, questa espressione è una costante b; ed è inutile occuparsene più oltre.

Supponiamo che una almeno delle $b_1, b_2, \ldots ., b_n$ sia differente da zero. Se $n = 1$, si ha che l'equazione $b_1 x_1 + b = 0$ rappresenta il punto L di coordinata $x_1 = -\frac{b}{b_1}$. A un valore generico x_1 corrisponde in S_2 un punto la cui distanza dal punto L è uguale a $\left| x_1 - \left(-\frac{b}{b_1}\right)\right| = \frac{1}{b_1} \left| b_1 x_1 + b \right|$. Dunque il modulo di $\left| b_1 x_1 + b \right|$ rappresenta, a meno del fattore costante b_1, la distanza dal punto x_1 al punto L, trasformato del punto L_∞ mediante la T^{-1}.

Supponiamo $n > 1$. I due iperpiani (10), (11) di S_{2n} sono evidentemente ortogonali; quindi la distanza h di un punto generico A di S_{2n} dalla intersezione dei due iperpiani considerati è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle distanze da A all'iperpiano (10) e all'iperpiano (11).

Se $x_k = \xi_k + i\,\eta_k$ sono i valori delle x, corrispondenti al punto A, si avrà

$$h = \sqrt{\frac{[\Sigma(\beta_k \xi_k - \gamma_k \eta_k) + \beta]^2 + [\Sigma(\beta_k \eta_k + \gamma_k \xi_k) + \gamma]^2}{\Sigma(\beta_k^2 + \gamma_k^2)}}$$

$$= \frac{\mathrm{mod}\,[b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n + b]}{\sqrt{b_1 b_1^0 + b_2 b_2^0 + \dots + b_n b_n^0}}\,.$$

Quindi, *a meno del fattore costante* $\sqrt{\Sigma b_k b_k^0}$, *il modulo di* $\Sigma b_k x_k + b$ *rappresenta la distanza dal punto* x_k *o meglio dal punto* (ξ_k, η_k) *(dove* $\xi_k + i\,\eta_k = x_k$*) di* S_{2n} *alla varietà* L, *trasformata di* L_∞ *mediante la* T^{-1}.

Ora sia A un punto generico di S_{2n} e supponiamo che sia possibile trovare un intorno α' di A così piccolo, che nessuna varietà L, trasformata di L_∞ mediante una trasformazione di G abbia punti comuni con α'; sia α un intorno di A tutto interno ad α'; sia μ la minima distanza euclidea da un punto di α a un punto del contorno di α'. Sarà $\mu > 0$.

Siano B, C due punti di α, e siano h_1, h_2 le distanze da B, C a una delle varietà L: sarà $h_2 > \mu$. Se ε è la massima corda di α, abbiamo che $\frac{h_1}{h_2} < \frac{h_2 + \varepsilon}{h_2} = 1 + \frac{\varepsilon}{h_2} < 1 + \frac{\varepsilon}{\mu}$.

Se invece α', per quanto piccolo, avesse punti comuni con una delle varietà L, allora, se C è un punto comune ad α, e a questa varietà L, si avrebbe $\frac{h_1}{h_2} = \infty$. La condizione II′ si può dunque enunciare anche così:

II″. *Se A è un punto generico, se ne può trovare un intorno α' così piccolo, che nessun punto di α' giaccia su una delle varietà L trasformate di L_∞ mediante una trasformazione T^{-1} di G, o, in altre parole, che nessun punto di α possa essere trasformato in un punto a distanza infinita da una trasformazione T di G.*

Ora osserviamo che la condizione I di Poincaré si può enunciare dicendo che l'insieme dei punti che appartengono a un intorno abbastanza piccolo di un punto generico A, e agli intorni equivalenti (eccetto al più un numero finito di questi intorni) non ha alcun punto limite su L_∞. Ne deduciamo facil-

mente che la condizione (II'') è inclusa nella (I). Se infatti in un intorno piccolo a piacere α di A penetrassero varietà trasformate di L_∞, in tale intorno ne penetrerebbero infinite; e quindi infiniti degli intorni equivalenti ad α avrebbero un punto sulla L_∞. Non potrebbe quindi essere soddisfatta la nostra prima condizione.

Notiamo ancora che, se noi applichiamo alle x una qualsiasi trasformazione lineare intera omogenea V, il gruppo G resta trasformato in un gruppo simile G'; ed è ben evidente che il risolvere i nostri problemi fondamentali per il gruppo G equivale a risolverli per il gruppo G', e viceversa. Affinchè le serie θ possano riuscire utili nel nostro studio, ***basta dunque che esse siano convergenti per un gruppo G', simile a G.*** Ma con una trasformazione V si può portare L_∞ in una qualsiasi varietà lineare a $n - 1$ dimensioni (complesse)

$$(12)\qquad \Sigma\, \alpha_i x_i + \alpha = 0 \qquad (\alpha \text{ costanti reali o complesse}).$$

Affinchè dunque le serie θ relative al gruppo lineare G, o a un gruppo simile G' convergano per $p \geqq 2$ nella regione R coperta da una rete N di campi fondamentali per G, basta che si possano trovare delle costanti α in guisa che esista al più un numero finito di campi della rete, un punto dei quali ha dalla (12) *una distanza nulla o infinitesima.*

Questa condizione si può esporre in forma un po' più generale, dicendo *i punti di un intorno α di un punto generico A, e degli intorni trasformati* (escluso al più un numero finito di questi intorni) *formano un insieme di punti, che non ha punti limiti sulla* (12).

Una prima applicazione si trova nei gruppi kleiniani (o fuchsiani) G. In tal caso è $n = 1$, e le (12) si riducono a punti.

In tal caso, se G trasforma in sè stessa una rete N di campi fondamentali, è ben chiaro che si può trovare un punto A tale che al più un numero finito di campi fondamentali abbiano da A distanza infinitesima. Basta p. es. che A sia esterno a N, o interno a un campo fondamentale di N.

Dunque, *se G è un qualsiasi gruppo di trasformazioni lineari su una variabile x, che sia pr. dis., e che trasformi in sè stessa una rete N di campi fondamentali, esistono infiniti gruppi G' simili a G, per cui le nostre serie θ sono convergenti.*

Altre notevoli applicazioni si possono fare nel caso $n > 1$.

P. es. la nostra condizione è soddisfatta, *se la rete N è tutta a distanza finita*, oppure *se esiste una varietà* (12) *i cui punti sono a distanza non infinitesima dai punti di N.*

Tra i gruppi G, che soddisfano a queste condizioni, ricorderò i gruppi iperfuchsiani di tipo iperbolico, per i quali la regione R coperta dalla rete N è la regione

$$\Sigma\, x_h\, x_h^0 = \Sigma\, (\xi_h^2 + \eta_h^2) \leq 1.$$

In tal caso come varietà (12) si può scegliere proprio la varietà L_∞.

Osservazione. — Si noti che è inutile occuparci particolarmente dei *gruppi lineari misti*, perchè evidentemente un tale gruppo soddisfa alle condizioni di Poincaré, se vi soddisfano i corrispondenti gruppi parziali.

§ 41. — Risoluzione del problema fondamentale (B).

Per dimostrare in tutti i casi precedenti, per cui abbiamo trovato che le serie θ rappresentano funzioni analitiche, l'esistenza effettiva di funzioni θ non identicamente nulle, soddisfacenti alle (7), si può *in taluni casi* costruire una funzione $\theta\,(f, p, x)$, partendo da una funzione f, che abbia tali singolarità che la Θ da essa dedotta, pure conservando la convergenza assoluta e uniforme in un punto generico, abbia di necessità una singolarità in qualche punto particolare. Così p. es. se $n = 1$, basta imporre alla f di avere un polo in un solo punto di N, e precisamente p. es. in un punto interno a un campo fondamentale. Con procedimenti simili si può talvolta assicurare l'esistenza di due funzioni θ, il

cui rapporto non è una pura costante. Però questi metodi, così semplici e intuitivi, non sono applicabili al caso generale. Noi seguiremo un'altra via, che ci condurrà anche a un terzo risultato fondamentale.

Noi dimostreremo cioè in modo diretto che:

1. ***Esistono serie θ non identicamente nulle.***

2. ***Esistono due serie θ dello stesso grado, il cui rapporto non è una costante.*** Questo teorema ci dimostrerà l'***esistenza effettiva di funzioni*** (non costanti) ***invarianti per G.***

3. ***Esistono $n+1$ serie θ ($i=1, 2, \ldots, n+1$) dello stesso grado, tali che il Iacobiano delle $\frac{\theta_h}{\theta_{n+1}}$ ($h=1,2,\ldots,n$) non è identicamente nullo.*** Questo teorema ci dimostrerà l'***esistenza di n funzioni indipendenti, invarianti per G, e completerà quindi la risoluzione del nostro problema (B) per tutti i gruppi G, esaminati al paragrafo precedente.***

Con un calcolo perfettamente simile a quello da noi svolto a pag. 282 per calcolare il Iacobiano di una trasformazione lineare, vediamo che quest'ultimo teorema equivale a provare la esistenza di funzioni θ_i tali che il determinante

$$E = \begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \ldots & \theta_{n+1} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \theta_2}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

non sia identicamente nullo. Ed è ben evidente che, se noi dimostriamo che E è in qualche punto differente da zero, avremo contemporaneamente dimostrato gli altri due teoremi.

Volgiamoci dunque allo studio del determinante E in un punto generico A.

In A è $\lim_{\nu=\infty} D_\nu^p = 0$ per $p \geqslant 2$ (*). Dunque i valori delle $|D_\nu|$ in A hanno un *massimo* M; esisterà un numero finito $1 + h$ $(h \geqslant 0)$ di $|D_\nu|$ che hanno in A il valore M: e noi supporremo che sia $|D_0| = |D_1| = \dots = |D_h| = M$. Quindi per $\nu > h$ sarà $\left|\frac{D_\nu}{M}\right| < 1$; e cioè esisterà una costante λ tale che $0 < \lambda < 1$, e che $\left|\frac{D_\nu}{M}\right| \leq \lambda$ per $\nu > h$. Sarà quindi, posto $\frac{D_\nu}{M} = \eta_\nu$ per $\nu \leq h$:

$$\frac{\theta(f, p, x)}{M^p} = \sum_{\nu=0}^{h} f(T_\nu x)\, \eta_\nu^p + \mu^p\, a(f, p) \quad (\lambda < \mu < 1) \quad (\mu = \text{cost.})$$

dove $a(f, p)$ è una funzione che, come si riconosce immediatamente sulla sua espressione effettiva, resta finita nel punto A (**) al crescere indefinito di p (ossia che resta inferiore in modulo nel punto A a una costante $H(f)$ indipendente da p), e dove $|\eta_\nu| = 1$ nel punto A. Se α è un intorno abbastanza piccolo di A, e se si ingrandisce, ove occorra, convenientemente la $H(f)$, possiamo anzi asserire che le $a(f, p)$ saranno ancora in tutto α minori in modulo di una costante positiva $H(f)$, indipendente da p (***). Analogamente anche le derivate prime delle $a(f, p)$ saranno in un intorno β di A, interno ad α, minori di una costante finita positiva $K(f)$, indipendente da p (****). Indichere-

(*) Perchè la serie $\Sigma\, D_\nu^p$ è convergente. Ne segue anzi $\lim_{\nu=\infty} D_\nu^q = 0$ per $q \geqslant 0$.

(**) Basta osservare che la $a(f, p)$ viene ad essere data da una serie affatto analoga alle serie θ: e ricordare la dimostrazione della convergenza delle serie θ data al § 39 (pag. 276).

(***) Si ricordi che, per ipotesi, il rapporto dei valori di D_ν in due punti di α è inferiore a una costante indipendente da ν.

(****) Ciò si può dimostrare in modo analogo a quello usato precedentemente, o si può dedurre dal precedente risultato, ricordando la formola fondamentale di Cauchy, che esprime i valori di una funzione analitica e delle sue derivate mediante integrali curvilinei.

mo con $L(f)$ la più grande delle costanti $H(f)$, $K(f)$. Avremo, posto $\eta_{\nu i} = \frac{\partial \eta_\nu}{\partial x_i}$, $f^{(i)} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\theta(f, p, x)}{M^p}\right] = \sum_{\nu=1}^{h}\left[p\,\eta_\nu^{p-1}\,\eta_{\nu i}\,f(T_\nu x) + \eta_\nu^p \sum_i f^{(i)}(T_\nu x)\,\frac{\partial\, T_\nu x_i}{\partial x_i}\right] + \mu^p \frac{\partial a(\ldots}{\partial \ldots}$$

Poniamo ora successivamente $f = f_1$, $f = f_2$, $\ldots$, $f = f_{n+1}$, dove le f_j $(j = 1, 2, \ldots, n + 1)$ sono funzioni, che soddisfano alle condizioni di convergenza, e ad altre condizioni che enunceremo più avanti. Posto

$$a_{ji\nu} = \sum_i f_j^{(i)}(T_\nu x)\,\frac{\partial\, T_\nu x_i}{\partial x_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n + 1;\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

sarà

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\theta(f_j, p, x)}{M^p}\right] = \sum_{\nu=0}^{h}\left[p\,\eta_\nu^{p-1}\,\eta_{\nu i}\,f_j(T_\nu x) + \eta_\nu^p\,a_{ji\nu}\right] + \mu^p\,\frac{\partial a(f_j, p)}{\partial x_i}.$$

E, ricordiamolo, si ha (nel punto A) $|\eta_\nu| = 1$, $\left|\frac{\partial a(f_j, p)}{\partial x_i}\right| < L(f_j)$.

Per dimostrare che, se p è abbastanza grande, il determinante E è differente da zero nel punto A, basterà dimostrare che nel punto A è differente da zero il determinante E', che si deduce da E sostituendo alle θ le $\frac{\theta}{M^p}$. Se noi ora in E' alle $\frac{\theta}{M^p}$ e alle loro derivate sostituiamo i valori dati dalle formole precedenti, troviamo facilmente che

$$E' = E'' + E''', \text{ dove } E'' = \begin{vmatrix} \sum_{\nu=0}^{h} f_1(T_\nu x)\,\eta_\nu^p & \ldots \\ \sum_{\nu=0}^{h}\left[p\,\eta_\nu^{p-1}\,\eta_{\nu 1}\,f_1(T_\nu x) + \eta_\nu^p\,a_{11\nu}\right] & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \sum_{\nu=0}^{h}\left[p\,\eta_\nu^{p-1}\,\eta_{\nu n}\,f_1(T_\nu x) + \eta_\nu^p\,a_{1n\nu}\right] & \ldots \end{vmatrix} \ (*)$$

(*) Di questo determinante di ordine $n + 1$ fu scritta solo la prima colonna; le altre se ne deducono, sostituendo rispettivamente f_j ad f_1, ed $a_{ji\nu}$ ad $a_{1i\nu}$ per $j = 2, 3, \ldots, n + 1$.

e dove E''' è un polinomio, di cui ogni termine è un prodotto del tipo:

$$p^{\gamma}\,\mu^{tp}\,B$$

dove:

γ è un intero non negativo e non maggiore di n,

t è un intero positivo maggiore di zero,

B è un prodotto di un numero finito di fattori, scelti tra i valori delle $a(f_j, p)$, delle loro derivate, delle η_ν^p, η_ν^{p-1}, delle $\eta_{\nu t}$, delle $f_j(T_\nu x)$, $a_{jt\nu}$ nel punto A. Poichè nel punto A si ha $|\eta_\nu| = 1$, e le $a(f_j, p)$ e le loro derivate sono minori di una conveniente costante L (*) indipendente da p, avremo evidentemente che nel punto A

$$\lim_{p=\infty} |B\,p^{\gamma}\,\mu^{tp}| \leq \lim_{p=\infty} |B\,\mu^p\,p^n| = 0,$$

e quindi:

$$\lim_{p=\infty} E''' = 0.$$

Enuncieremo ora le ulteriori condizioni (**) che imponiamo alle f_j. Supporremo che *nel punto A considerato:*

1. $\left|\sum_{\nu=0}^{h} f_1(T_\nu x)\,\eta_\nu^p\right|$ sia maggiore, per ogni valore di p, di una costante positiva $K > 0$ (***); le $f_j(T_\nu x)$ siano, per $j = 2, 3, \ldots, n+1$, tutte uguali a zero.

2. Le $a_{jt\nu}$ siano per $j > 1$ tutte nulle, eccetto che le a_{211}, a_{321}, ..., $a_{n+1,n1}$, che siano uguali a 1 (****).

(*) Basta che L sia maggiore delle n quantità $L(f_1)$, $L(f_2)$, ..., $L(f_n)$.

(**) Che le seguenti condizioni siano compatibili con le condizioni di convergenza risulta da ciò che, mentre queste ultime impongono delle restrizioni alla posizione dei punti singolari per le f_j, le condizioni, che noi imporremo, sono relative ai valori delle f_j e delle loro derivate prime $f_j^{(t)}$ in un numero finito $h+1$ di punti $(TA_0, T_1 A, \ldots, T_h A)$.

(***) Questa condizione è soddisfatta p. es. se nel punto A la quantità $|f_1(T_0 x)|$ è in modulo maggiore di $K + \sum_1^h |f_1(T_\nu x)|$.

(****) Poichè per ogni valore di ν ($\nu \leq h$) il Iacobiano di T_ν è differente da zero, ossia il determinante delle $\dfrac{\partial T_\nu x_t}{\partial x_t}$ non è nullo, il dare i

Sviluppando E'', troveremo che nel punto A si ha così $E'' = \left[\sum_{\nu=0}^{h} f_1(T_\nu x)\, \eta_\nu^p\right] \eta_1^{np}$. E poichè $|\eta_\nu| = 1$ nel punto A, troveremo che, per ogni valore di p, è $|E''| > K$; e poichè $\lim_{p=\infty} E''' = 0$, sarà anche, per p abbastanza grande,

$$|E'' + E'''| \geqq \frac{K}{2} \qquad \text{ossia} \qquad |E'| > \frac{K}{2}.$$

Dunque E' non può essere identicamente nullo per p abbastanza grande.

c. d. d.

§ 42. — Osservazioni storiche, e confronti varii (*).

Il problema (B) è stato studiato per la prima volta nel caso particolare che G sia un gruppo di movimenti euclidei. Questo problema speciale è il nucleo, da cui ebbero origine le teorie delle funzioni ellittiche, iperellittiche, fuchsiane, automorfe: esso, posto nel caso $n = 1$, per studiare le trascendenti, che si ottengono dall'integrazione di radicali quadratici di polinomii di terzo o di quarto grado, fu studiato poi più generalmente per risolvere il celebre *problema di inversione* di Iacobi. Ed è notevole che neanche questo caso particolare del nostro problema sia stato risoluto completamente, e che d'altra parte le serie da noi trovate nei precedenti paragrafi siano, se $n > 1$, affatto inefficaci per la risoluzione di esso. Questo fatto, insieme alla grande molteplicità di ricerche, che si riannodano attorno al problema (B), quando G è un gruppo di movimenti euclidei, fanno sì che lo studio di questo problema, che pure è un caso particolare dei problemi generali relativi alle funzioni automorfe, costituisca

---

valori delle $a_{j1\nu}, a_{j2\nu}, \ldots, a_{jn\nu}$ equivale a prefissare i valori delle $f_j^{(1)}(T_\nu x)$, $f_j^{(2)}(T_\nu x)$, $\ldots$, $f_j^{(n)}(T_\nu x)$; i quali anzi ne risultano determinati in modo univoco in virtù delle $a_{jt\nu} = \sum_t f_j^{(t)}(T_\nu x) \frac{\partial T_\nu x_t}{\partial x_t}$.

(*) Questo paragrafo, che è specialmente destinato a confronti tra i nostri studii e alcune teorie fondamentali dell'analisi, può essere ommesso in una prima lettura.

una teoria a sè, che ha già preso ampio sviluppo, che costituisce da sola uno dei rami più progrediti dell'analisi odierna, e che ha già ricevuto esposizioni sistematiche in numerosi trattati (*). Ecco perchè non sarebbe opportuno che noi qui ce ne occupassimo *ex professo;* ed ecco perchè ci accontenteremo di un rapido cenno, destinato a richiamare le analogie, e le differenze che passano tra il problema particolare in discorso, e i problemi di cui noi ci occupiamo.

Come abbiamo già detto, il problema (B), quando si supponga che G sia un gruppo di movimenti euclidei, non è stato risoluto completamente. Se, al solito, poniamo $x_h = \xi_h + i\eta_h$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$, e indichiamo con S_{2n} lo spazio euclideo, in cui le ξ, η sono coordinate, si è fatta l'ulteriore ipotesi che G sia un gruppo di traslazioni, e che esso possegga un campo fondamentale tutto posto a distanza finita (**). Il risultato, che se ne ottenne, e che, per quanto già dimostrato per vie molteplici, non ha ancora trovato il giusto posto in una teoria generale delle funzioni automorfe, è il seguente:

Se G è un gruppo di traslazioni, e possiede un campo fondamentale tutto posto a distanza finita, allora, affinchè esistano funzioni uniformi delle x, invarianti per G, senza singolarità essenziali a distanza finita (***), *i coefficienti delle traslazioni generatrici*

(*) Cfr. p. es., oltre ai trattati sugli integrali abeliani, il pregevole trattato del KRAZER. *Lehrbuch der Thetafunktionen.* *Teubner.* Leipzig 1903.

(**) Devo ricordare alcune recenti e importanti ricerche del COUSIN (*Sur les fonctions périodiques: Annales de l'École Normale Supér.* Tomo 19, 1902; e *Comptes Rendus*, 2. sem. tomo CXLIII, 1906), in cui è dato qualche notevole risultato anche per il caso che G possegga campi fondamentali, che si estendono all'infinito, senza però che venga esaurita la questione.

(***) Notiamo che anche nei casi studiati nei paragrafi precedenti, se G aveva campi fondamentali, formanti una rete N, nessuno dei quali avesse punti comuni col contorno di N, le funzioni θ, da noi studiate, e le funzioni invarianti per G, che si ottengono come quozienti di funzioni θ, non hanno alcuna singolarità essenziale entro N.

Questi fatti saranno del resto approfonditi meglio più avanti, specialmente nel caso dei gruppi fuchsiani e kleiniani.

di G devono soddisfare a un certo numero di uguaglianze, e disuguaglianze. E precisamente il gruppo G deve essere simile a un gruppo G' di traslazioni, che ammette un sistema di $2n$ traslazioni generatrici indipendenti, di cui le prime n sono del tipo

$$x'_1 = x_1;\ x'_2 = x_2;\ \ldots;\ x'_{j-1} = x_{j-1};\ x'_j = x_j + \frac{\pi i}{e_j};\ x'_{j+1} = x_{j+1};\ldots;\ x'_n = x_n$$
$$(j = 1, \ldots, n)$$

dove le e_j sono interi positivi, tali che $e_1 = 1$ e per $\lambda = 1, 2, \ldots p-1$ $e_{\lambda+1}$ è divisibile per e_λ; mentre le residue n traslazioni sono del tipo

$$x'_1 = x_1 + a_{1j};\ x'_2 = x_2 + a_{2j};\ \ldots;\ x'_n = x_n + a_{nj} \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

dove le a_{ih} $(i, h = 1, 2, \ldots, n)$ sono costanti tali che valgano le $a_{ih} = a_{hi}$, e che la forma $\sum\limits_{i,h}^{1,n} R\,(a_{ih})\, y_i\, y_h$ (*) sia una forma definita negativa delle y.

Basta dunque saper costruire le funzioni invarianti per un tale gruppo particolare G'. A tale scopo si è partiti dalla serie

$$\vartheta \begin{bmatrix} g_1\, g_2 \ldots g_n \\ h_1\, h_2 \ldots h_n \end{bmatrix} (x_1, x_2, \ldots x_n;\ a_{jh}) =$$
$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} e^{\sum\limits_{j,h}^{1,n} a_{jh}(g_j + m_j)(g_h + m_h) + 2\sum\limits_{j}^{1,n}(m_j + g_j)(x_j + h_j \pi i)}$$

dove le g_j, h_j sono costanti reali qualsiasi. Questa serie fu chiamata *la serie teta, di caratteristica* $\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_n \\ h_1 \ldots h_n \end{bmatrix}$, *e di periodi* a_{jh}.

Sia p un intero divisibile per $e_1, e_2, \ldots, e_n$ e si ponga

$$\frac{p}{e_1} = q_1 \quad \frac{p}{e_2} = q_2 \quad \ldots \quad \frac{p}{e_n} = q_n$$

Indichiamo con ν_i un numero variabile tra 0 e $q_i - 1$, e siano $C_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n}$ costanti arbitrariamente scelte.

(**) Con $R\,(a_{ih})$ indico, secondo convenzioni già usate, la parte reale di a_{ih}.

Poniamo

$$ {}_1,\, x_2, \ldots, x_n) = $$

$$ {}_1 \sum_{0}^{q_2-1} {}_{\nu_2} \cdots \sum_{0}^{q_n-1} {}_{\nu_n}\, C_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n}\, \vartheta \begin{bmatrix} \frac{g_1+\nu_1}{q_1} & \frac{g_2+\nu_2}{q_2} & \cdots & \frac{g_n+\nu_n}{q_n} \\ h_1 & h_2 & & h_n \end{bmatrix} (p x_1, p x_2, \ldots, p x_n; p a_{jh}). $$

Troviamo la formola seguente, che definisce quale effetto produca sulla H una qualsiasi trasformazione di G'.

$$ H\left(x_1 + \lambda_1 \frac{\pi i}{e_1} + \sum_{s=1}^{n} l_s a_{1s};\; x_2 + \lambda_2 \frac{\pi i}{e_2} + \sum_{j=1}^{n} l_s a_{2s};\; \ldots;\; x_n + \lambda_n \frac{\pi i}{e_n} + \sum_{j=1}^{n} l_s a_{ns}\right) = $$

$$ = H(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{-p \sum\limits_{s,h}^{1,n} a_{sh} l_s l_h - 2p \sum\limits_{s}^{1,n} l_s x_s + 2 \sum\limits_{s}^{1,n} (\lambda_s g_s - l_s h_s)\pi i} $$

(λ_s, l_s interi qualunque).

Se noi dunque teniamo fisso l'intero p, e le costanti g_s, h_s, ***la funzione H resta moltiplicata per un fattore indipendente dalle costanti $C_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n}$, quando vi si applica una qualsiasi trasformazione di G'; cosicchè il quoziente di due tali funzioni H è una funzione invariante per G'.***

Le serie ϑ, definite più sopra, hanno dunque nel problema attuale, un ufficio affatto analogo a quello, che le serie θ dei paragrafi precedenti hanno per i problemi, studiati in questo libro. Ciò spiega anzi perchè queste ultime serie abbiano pure ricevuto il nome di *serie teta.*

Le relazioni, che legano tutte le funzioni invarianti per G', sono poi perfettamente analoghe a quelle, che troveremo più avanti per le funzioni fuchsiane, kleiniane, iperfuchsiane, ecc.

§ 43. — La convergenza delle serie ξ.

Ci volgeremo ora allo studio delle serie ξ, limitandoci però a gruppi Γ di trasformazioni lineari intere omogenee ed a gruppi G iperfuchsiani, o iperfuchsiani misti p. d. t. i., i quali, come sappiamo, comprendono come caso particolare i gruppi fuchsiani

o fuchsiani misti. Ognuno di questi gruppi è un gruppo di movimenti in una metrica Hermitiana semplice o mista, secondo che il gruppo è un gruppo iperfuchsiano puro o misto (*). Sia G un tale gruppo e supponiamo che ***un suo campo fondamentale non abbia vertici a distanza geodetica infinita*** nella metrica corrispondente. Le trasformazioni

$$S_1, S_2, \ldots, S_h,$$

che portano un campo K fondamentale nei campi adiacenti, costituiscono un sistema di trasformazioni generatrici di G. (Il numero h è un numero finito, perchè per ipotesi i campi fondamentali di G non hanno vertici a distanza infinita). Siano $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h$ le trasformazioni corrispondenti di Γ, le quali pure formeranno un sistema di trasformazioni generatrici di Γ. Le S_i (e quindi anche le σ_i) saranno a due a due inverse, perchè, se T è una trasformazione di G, che porta K in un campo adiacente, altrettanto avviene di T^{-1}. Ricordiamo ora i risultati del § 33. Una trasformazione T di G, che porti un punto A di K in un punto A', la cui distanza geodetica da A è uguale ad l, si può scrivere sotto la forma:

$$S_{i_1}^{s_1} S_{i_2}^{s_2} \ldots S_{i_r}^{s_r}$$

dove $i_1, i_2, \ldots, i_r$ sono interi uguali o distinti, minori o uguali ad h, ed $s_1, s_2, \ldots, s_r$ sono interi *positivi*: e noi sappiamo (pag. 218) che esiste una costante α tale che si può supporre $s_1 + s_2 + \ldots + s_r < \alpha l$. La trasformazione τ di Γ, corrispondente alla T, sarà la trasformazione $\sigma_{i_1}^{s_1} \sigma_{i_2}^{s_2} \ldots \sigma_{i_r}^{s_r}$. Indicheremo con M una costante positiva, che supporremo così grande da soddisfare alle varie ipotesi, che faremo su essa più avanti. Intanto, se M è più grande del massimo valore assoluto dei coefficienti delle σ_ρ ($\rho = 1, 2, \ldots, h$), i coefficienti di τ saranno in valore assoluto minori di

---

(*) Dico, per brevità, che un gruppo e una metrica non misti sono semplici o puri.

(§ 1, pag. 5) $\frac{1}{m}(m\,M)^{\sum_1^r \rho\, s_\rho}$ ossia, se $m\,M > 1$ (come possiamo supporre, prendendo M abbastanza grande) sono minori di

$$\frac{1}{m}(m\,M)^{\varkappa l}.$$

Studiamo ora le serie ξ, date dalla (10). Relativamente alle funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_m$ facciamo le stesse ipotesi, che nel § 39 (pag. 275) abbiamo fatto per f. Avverrà allora, analogamente a quanto vedemmo nel § 39, che si può supporre in un intorno i di un punto generico A:

$$|f_i(T_\nu x)| < M,$$

purchè M sia sufficientemente grande.

Se i coefficienti di τ_ν^{-1} sono minori in modulo della costante β_ν, *l'espressione* $\tau_\nu^{-1} f_i(T_\nu x)$ *sarà in modulo minore di* $m\,\beta_\nu\,M$.

Consideriamo ora l'intorno i del punto generico A; e vediamo se le (10) sono in i assolutamente e uniformemente convergenti. Costruiamo col centro in A infinite ipersfere $I_1, I_2, I_3, I_4 \ldots$ il cui raggio geodetico (nella nostra metrica) è rispettivamente uguale a $r, 2r, 3r, 4r \ldots$, dove r è una costante positiva qualunque. E sia v il volume (misurato nella nostra metrica) (§ 6, pag. 29) dell'intorno i. Gli intorni, trasformati di i mediante le trasformazioni di G, sono nella nostra metrica congrui a v e perciò hanno lo stesso *volume* v. Sia λ la massima distanza geodetica di due punti di i; in tal caso λ sarà pure la massima distanza geodetica di due punti di un intorno, trasformato di i mediante una trasformazione di G. Quelli di questi intorni, che hanno almeno un punto compreso tra le ipersfere I_n, I_{n+1} (*), saranno tutti interni all'ipersfera W_n di centro A, il cui raggio geodetico è $(n+1)\,r+\lambda$, e il cui volume è perciò minore (§ 16, pag. 102) di $\mu\, e^{\nu(nr+r+\lambda)}$, dove μ, ν sono due costanti positive. Ora supporremo i così piccolo, che due intorni equivalenti ad i non abbiano punti comuni.

(*) Questo n è un intero variabile, affatto distinto dal numero delle variabili indipendenti x. Ogni equivoco è impossibile.

Ora la minima distanza da A a un punto dell'intorno, in cui una delle nostre trasformazioni $T^{(n)}$ porta i, non può essere per le nostre convenzioni minore di $n\,r$. E, se noi per semplicità trasformiamo le coordinate in modo che A sia proprio l'origine, avremo per i risultati, ottenuti in fine del § 16 (pag. 102), che:

$$P_n > h\,e^{nsr} \qquad P_n^{-p} < h^{-p}\,e^{-nspr},$$

dove h, s sono costanti positive.

La somma Σ_n dei moduli dei q_n termini considerati è dunque minore di

$$M\frac{\mu}{v}\,e^{\nu(nr+r+\lambda)}\,e^{\chi(nr+r+\lambda)\log mM}\sqrt[4]{M^p}\,h^{-\frac{p}{4}}\,e^{-nsr\frac{p}{4}} = L\left[e^{(\gamma - s\frac{p}{4})r}\right]^n$$

dove con L, γ ho indicato due costanti positive.

Ma evidentemente la serie dei moduli dei termini della (10) è uguale a

$$\Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots,$$

ed è quindi minore di

$$L\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{(\gamma - s\frac{p}{4})r}\right]^n$$

Se p è così grande che $\gamma - s\frac{p}{4} < 0$, quest'ultima serie è una progressione geometrica decrescente, e quindi la (10) *converge assolutamente e uniformemente nell'intorno i di un punto generico A.*

La precedente dimostrazione non si applica più, se un campo fondamentale possiede qualche vertice a distanza (non euclidea) infinita: si può anzi dimostrare che in tal caso le serie ξ *non sono,* in generale, assolutamente convergenti. Il Poincaré ha dimostrato però che esse continuano a essere assolutamente e uniformemente convergenti nell'intorno di un punto generico A, se il gruppo G è un gruppo fuchsiano il quale soddisfa alle condizioni seguenti:

1. Il campo fondamentale K di G ha vertici a distanza non euclidea infinita. Si *suppone* però che i lati e i vertici del campo K

siano in numero finito. Esisterà quindi soltanto un numero finito di sostituzioni, che portano K in un campo adiacente: e noi potremo applicare al nostro gruppo i risultati del § 33.

2. Costruito, come sopra, un sistema di trasformazioni S generatrici per il gruppo G, le trasformazioni σ di Γ, che corrispondono a quelle delle S, che sono paraboliche, sono tutte simili a trasformazioni U.

(Nel § 1, pag. 4, abbiamo definito le trasformazioni U).

Per quanto nel § 37, pag. 262, si sieno dimostrati in casi assai più generali i teoremi di esistenza per le funzioni zeta-automorfe di una sola variabile, pure daremo la dimostrazione diretta del teorema di Poincaré, vista la grande importanza delle serie ζ.

Secondo i risultati del § 32 (pag. 214), supporremo che ogni vertice parabolico A di K costituisca da sè solo un ciclo, cosicchè i due lati di K, uscenti da A, siano trasformati l'uno dell'altro mediante quella trasformazione S, che lascia fisso il punto A. Riprendendo le precedenti notazioni, si trova ancora che una qualsiasi trasformazione T di G si può scrivere nella forma

$$S_{i_1}^{s_1} S_{i_2}^{s_2} \dots S_{i_r}^{s_r} \qquad (s_1, s_2, \dots, s_r \text{ interi positivi})$$

dove la somma degli esponenti s, corrispondenti a trasformazioni S_i non paraboliche, è minore di αl, e la somma dei logaritmi degli esponenti s, corrispondenti a trasformazioni S_i paraboliche, è minore di $\alpha_1 l$ ($\alpha, \alpha_1 =$ cost.) (§ 33, pag. 224). La trasformazione corrispondente τ di Γ sarà uguale a $\sigma_{i_1}^{s_1} \sigma_{i_2}^{s_2} \dots \sigma_{i_r}^{s_r}$, dove una σ_i, che corrisponda a una trasformazione parabolica S_i di G, è per ipotesi simile a una trasformazione U. Se dunque M è una costante abbastanza grande, i coefficienti della trasformazione τ di Γ saranno (§ 1, pag. 6) inferiori in modulo a

$$\frac{1}{m} + m\, M^{3q+\alpha l}\, e^{\alpha_1 l}$$

dove q indica il numero delle trasformazioni paraboliche, contenute nel prodotto $S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}$, ed è quindi minore di $\alpha_2 l$ ($\alpha_2 =$ cost.) (§ 33, pag. 224).

Nel caso precedente si era invece trovato che i coefficienti di τ sono inferiori a $\frac{1}{m}(m\,M)^{\chi l}$. E un tale risultato è perfettamente simile all'attuale: in entrambi i casi abbiamo trovato infatti che i coefficienti della τ sono in modulo minori di un esponenziale, la cui base è costante, e l'esponente è una funzione lineare di l. La dimostrazione della convergenza delle serie ξ, per p abbastanza grande, continua perciò da questo punto in poi in modo affatto simile alla precedente.

Anche nel caso attuale si può dimostrare, in modo affatto analogo a quello, che usammo nella teoria delle serie θ, che si possono sempre scegliere delle funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_m$, in guisa che le ξ non si riducano a costanti.

Dai risultati degli ultimi paragrafi si deduce che:

Per ognuno dei casi, in cui abbiamo dimostrato la convergenza (assoluta e uniforme nell'intorno di un punto generico) *delle serie θ (delle serie ξ e θ), noi abbiamo contemporaneamente dimostrato la risolubilità del problema fondamentale B (problema A) del* § 17 (pag. 104), *trovando di più delle espressioni analitiche, che ci danno delle funzioni, soddisfacenti effettivamente alle condizioni imposte dal nostro problema.*

La questione di trovare in questi casi *tutti* i possibili sistemi di funzioni, che risolvono i problemi A e B, sarà trattata nei seguenti capitoli.

Osservazione. — Ci si può anche proporre il nostro problema (A) nel caso che G sia uno dei gruppi di traslazioni, di cui abbiamo discorso al § 42, pag. 293, pure essendo sempre Γ un gruppo di trasformazioni lineari intere omogenee. Le corrispondenti funzioni z si possono trovare, senza ricorrere a nuove trascendenti, ma restando nell'ambito delle serie θ, e degli esponenziali.

Il caso più noto di questo problema è quello, in cui $n = 1$. Per una trattazione diretta si vegga lo SCHLESINGER (*Handbuch der lin. Differentialgleichungen.* Tomo II, parte 2.ª, pag. 403 e seg.) ed anche PICARD (*Traité d'Analyse.* Tomo III (1896), pag. 403 e seg.).

Per noi il relativo teorema di esistenza si ottiene come caso particolare dei risultati del § 37 (pag. 262).

Osserviamo ora che la dimostrazione, da noi data nel caso di gruppi G fuchsiani, o iperfuchsiani per la convergenza delle serie ξ, vale anche per le serie θ, che, come vedemmo, non sono che un caso particolare delle serie ξ. Dalle serie ξ si passa infatti alle serie θ, supponendo che $m = 1$, e che il gruppo Γ sia ridotto alla trasformazione identica: e in questo caso anzi la nostra dimostrazione si semplifica grandemente, in quanto che, se tutte le trasformazioni di Γ sono uguali all'identità, è ben chiaro che si può supporre senz'altro nell'intorno i di un punto generico A

$$\tau_\nu^{-1} f_i(T_\nu x) = f(T_\nu x) < M,$$

se M è una costante abbastanza grande. E anche in questo caso si trova naturalmente ancora una progressione geometrica decrescente, dalla cui convergenza si può dedurre la convergenza assoluta e uniforme della serie θ in un intorno i di un punto generico A. Ma questa osservazione ci porta a un ulteriore risultato. Supponiamo che i coefficienti delle trasformazioni di G sieno funzioni continue (analitiche) di certi parametri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$. E sia $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_\rho$ un sistema generico di valori di questi parametri. Supponiamo che, al variare delle λ_i in un intorno α delle λ'_i, il gruppo G e la rete corrispondente di campi fondamentali variino con continuità.

Se i è abbastanza piccolo, esso e gli intorni ad esso equivalenti per ogni trasformazione di uno di questi gruppi G (corrispondente a un sistema generico di valori dei parametri λ nell'intorno α) saranno a due a due esterni l'uno all'altro. Allora la progressione geometrica, con cui abbiamo confrontato la serie θ, è indipendente dai valori dei parametri λ; ***quindi la serie θ converge uniformemente anche rispetto ai parametri λ in un intorno di un sistema generico di valori di questi parametri. La serie θ rappresenta quindi una funzione continua (analitica) di questi parametri*** (se p è abbastanza grande). Di questo teorema troveremo applicazioni molto importanti per la teoria dei gruppi fuchsiani.

Capitolo Undicesimo. — **Applicazioni a gruppi particolari.**

§ 44. — Funzioni θ-fuchsiane e fuchsiane.

Si dicono ***serie θ-fuchsiane*** le serie θ, quando il gruppo G è un gruppo fuchsiano su una variabile x. Noi abbiamo già visto in generale al § 41 (pag. 288), che si può sempre trovare una funzione f tale che $\theta(f, p, x)$ non sia identicamente nullo. Nel nostro caso ciò si può anche dimostrare direttamente, osservando (pag. 287) che, se la f è una funzione razionale di cui nessun punto singolare cade sul cerchio limite C e se essa ha entro il cerchio limite dei punti singolari che, a due a due, non sono mai equivalenti rispetto a G, la serie θ avrà uno e un sol termine singolare in ogni punto singolare per la f, o equivalente rispetto a G a un punto, in cui f è singolare. La funzione rappresentata dalla serie θ sarà dunque singolare in tutti questi punti e quindi non potrà essere identicamente nulla entro C.

Noi vogliamo ora approfondire lo studio di queste funzioni. Osserveremo intanto che, in virtù della definizione stessa di gruppi fuchsiani (§ 22, pag. 137), il gruppo G trasformerà in sè stessa ciascuna delle due regioni, in cui il cerchio limite C divide il piano π della variabile complessa x: e tanto nella regione R' di π, interna a C, come nella regione R'', esterna a C, il gruppo G si può considerare come gruppo di movimenti in una metrica di Bólyai, rappresentata conformemente in tale regione. Le dimostrazioni del Cap. 10 dimostrano entro R' la convergenza delle serie θ, le quali possono al più avere singolarità polari nei punti singolari per f e nei punti equivalenti. Queste dimostrazioni si applicano anche alla regione R'', esterna a C, con un'unica osservazione. Nella regione R'' esistono tutti i punti, trasformati del punto $x = \infty$ per le trasformazioni di G; in ognuno di questi punti il Iacobiano D di una trasformazione di G, e quindi anche un termine della serie θ, diventa infinito. La serie θ di-

venta dunque (in generale) infinita in tutti questi punti, ossia possiede in essi una singolarità *polare*. Per tutti i punti invece, che non sono equivalenti al punto $x = \infty$, valgono le dimostrazioni, date al Cap. 10, relativamente alla convergenza delle serie θ.

Si debbono ora distinguere due casi:

1. Il cerchio C è una linea singolare per il gruppo G, il quale possiede così due reti di campi fondamentali affatto distinte, separate dal cerchio C. Ogni punto di C è punto limite di infiniti punti equivalenti rispetto a G; cosicchè una funzione uniforme φ di x, che riprenda lo stesso valore in punti equivalenti, non può essere regolare in alcun punto di C. La linea C è per ogni tale funzione φ una linea singolare, oltre alla quale la φ non si può prolungare analiticamente. Noi potremo in tal caso limitarci allo studio della regione R': lo studio di R'', che porta a funzioni affatto distinte, si compie del resto con mezzi e con risultati affatto analoghi. Il quoziente di due serie θ dello stesso grado (che, come sappiamo, si può sempre supporre differente da una costante) rappresenta quindi due funzioni, invarianti per G: una esistente soltanto in R', l'altra esistente in R''.

2. Il cerchio C non è singolare per il gruppo G, il quale perciò possiede un'unica rete di campi fondamentali su tutto π. Il quoziente di due serie θ dello stesso grado rappresenterà una *unica* funzione in tutto π: noi dovremmo quindi studiare le nostre funzioni su tutto il piano π.

Noi ci limiteremo allo studio del primo caso, e precisamente studieremo, come dicemmo, le nostre funzioni in R': il secondo caso si studia con mezzi affatto simili, e anzi più semplici, perchè il gruppo G non ha più la linea C come linea eccezionale. L'estensione dei nostri risultati a questo secondo caso sarà perciò lasciata senz'altro al lettore.

Supponiamo costruita in R' la solita rete di campi fondamentali normali: e cerchiamo anzitutto di vedere *come θ si comporta in un punto A di un poligono fondamentale P, che sia lasciato fisso da qualche trasformazione non identica di G*. Come

è ben noto, (§ 24, pag. 147, e § 32, pag. 207 e seg.) un tale punto A sarà un vertice di P, e il sottogruppo G' di G, che lascia fisso A, sarà un gruppo ciclico, generato da una trasformazione ellittica o parabolica di G. Supponiamo dapprima di essere nel primo caso. Allora, se la funzione f è regolare in A, anche la funzione $\theta(f, p, x)$ sarà regolare in A. Se $x = \alpha$ nel punto A, il gruppo G' sarà generato (§ 30, pag. 189) da una trasformazione T, definita da una equazione del tipo

$$\frac{Tx - \alpha}{Tx - \beta} = e^{\frac{2\pi i}{g}} \frac{x - \alpha}{x - \beta}$$

dove $x = \beta$ è il punto trasformato di A nell'inversione per raggi vettori reciproci, definita dal cerchio C, dove g è l'ordine di G' (il periodo della T) e dove con Tx indico, al solito, il valore trasformato di x per la T. Il sottogruppo G' sarà formato dalle trasformazioni $T^0 = 1, T, T^2, \ldots, T^{g-1}$. Potremo (§ 3, pag. 12) trovare delle trasformazioni $S_0, S_1, S_2, \ldots$ tali che ogni trasformazione di G si possa scrivere in un modo e in un modo soltanto nella forma $S_\nu T^\rho$ $(\rho = 0, 1, 2, \ldots, g-1)$. Sarà

$$\theta = \sum_\nu L_\nu \qquad \text{dove} \qquad L_\nu = \sum_{\rho=0}^{g-1} f(S_\nu T^\rho x) \left(\frac{d(S_\nu T^\rho x)}{dx}\right)^p .$$

Posto $\xi = \dfrac{x-\alpha}{x-\beta}$, si ha $T\xi = e^{\frac{2\pi i}{g}} \xi$. Avremo

$$L_\nu \left(\frac{dx}{d \log \xi}\right)^p = \sum_0^{g-1} f(S_\nu T^\rho x) \left(\frac{d(S_\nu T^\rho x)}{d \log \xi}\right)^p .$$

Se noi sostituiamo Tx alla x, il secondo membro, che è una funzione razionale di x (*), resta inalterato. Quindi $L_\nu \left(\dfrac{dx}{d\log\xi}\right)^p$, considerato come funzione di $\xi = \dfrac{x-\alpha}{x-\beta}$, è una funzione razionale che resta inalterata, se noi alla ξ sostituiamo $e^{\frac{2\pi i}{g}}\xi$.

(*) In questo paragrafo supponiamo senz'altro che f sia una funzione razionale.

Quindi $L_\nu \left(\dfrac{d\,x}{d \log \xi}\right)^p$ è una funzione razionale di ξ^g, che indicheremo con $\psi_\nu(\xi^g)$. Si avrà dunque;

$$\theta = \left(\frac{d \log \xi}{d\,x}\right)^p \sum_\nu \psi_\nu(\xi^g).$$

Ora la f ha per $x = \alpha$ al massimo una singolarità polare.

Quindi $\sum_\nu \psi_\nu(\xi^g)$ è una funzione analitica monodroma di $\xi^g = \left(\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^g$, che ha al massimo una singolarità polare di un certo ordine finito h per $\xi^g = 0$, ossia una singolarità polare di ordine $h\,g$ nel punto $\xi = 0$ $(x = \alpha)$, quando si assuma $\dfrac{1}{x-\alpha}$ come infinito principale. La $\left(\dfrac{d \log \xi}{d\,x}\right)^p$ si comporta per $\xi = 0$ come $\left(\dfrac{1}{\xi}\right)^p$. Quindi, se si assume $\dfrac{1}{x-\alpha}$ come infinito principale, la θ diventa infinita di ordine $p + h\,g$ (h = intero finito).

Ma, se ora ricordiamo (§ 36, pag. 253) che $\xi^g = \left(\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^g$ è la variabile principale relativa al punto $x = \alpha$, siamo indotti ad assumere $\xi^{-g} = \left(\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{-g}$ come infinito principale nel punto $x = \alpha$, imitando quanto si fa nella teoria delle superficie riemanniane. Con questa convenzione, una serie θ di grado p avrà nel punto $x = \alpha$ un polo di ordine $h + \dfrac{p}{g}$, o, come diremo anche, un infinitesimo di ordine $-h - \dfrac{p}{g}$, quando si consideri un punto regolare come un polo, o come un infinitesimo di ordine nullo, e quando si ritengano equivalenti le due seguenti locuzioni:

Un punto è un polo di ordine k. Un punto è un infinitesimo di ordine $-k$.

Ricordando ora che $\left(\dfrac{d\,x}{d \log \xi}\right)^p \theta(f, p, x)$ è sviluppabile secondo le potenze di ξ^g, troviamo:

Una funzione, che sia quoziente di due serie θ dello stesso grado, è nel punto A sviluppabile in serie di potenze della corrispondente variabile principale ξ^g.

Studiamo ora un vertice A di P posto su C.

Ammetteremo che P *abbia un numero finito di lati*, e che quindi A non sia punto limite di infiniti vertici di P. Il punto A sarà lasciato fisso, come abbiamo già detto, da una trasformazione parabolica T di G

$$\frac{1}{Tx-\alpha}=\frac{1}{x-\alpha}+\gamma \qquad (\gamma=\text{cost.}).$$

Come sopra, potremo trovare delle trasformazioni $S_0=1, S_1, S_2 \ldots$ tali che ogni trasformazione di G si possa scrivere in uno e in uno solo modo sotto la forma $S_\nu T^\rho$ $(\nu=0,1,2,\ldots)(\rho=0,\pm 1,\pm 2\ldots)$. E avremo

$$\theta=\sum_\nu L_\nu \qquad \text{dove} \qquad L_\nu=\sum_{\rho=-\infty}^{\infty} f(S_\nu T^\rho x)\left(\frac{d\, S_\nu T^\rho x}{d\,x}\right)^{\nu}.$$

Posto $\xi=\frac{2\pi i}{\gamma}\,\frac{1}{x-\alpha}$, si ha $T\xi=\xi+2\pi i$.

Posto $M_\nu=L_\nu\left(\frac{d\,x}{d\,\xi}\right)^\nu=\sum_\rho f(S_\nu T^\rho x)\left(\frac{d\,S_\nu T^\rho x}{d\,\xi}\right)^\nu$, sarà

$$\theta=\pm(x-\alpha)^{-2\nu}Q, \qquad \text{dove} \qquad Q=\left(\frac{2\pi i}{\gamma}\right)^\nu \sum_\nu M_\nu.$$

Se noi in M_ν sostituiamo Tx al posto di x, la M_ν resta chiaramente inalterata. Dunque M_ν, considerata come funzione di ξ, resta inalterata per la trasformazione $\xi'=\xi+2\pi i$. Essa è dunque una *funzione uniforme della variabile principale t relativa al punto* $x=\alpha$ (pag. 253).

Ricordiamo che si è supposto *che la funzione f non abbia alcuna singolarità sul cerchio limite C*. Esisterà allora in P un intorno i (§ 36, pag. 251) di A (relativamente al gruppo G), in cui non cadrà alcun punto equivalente a un punto singolare della f; (questo intorno sul piano della corrispondente variabile principale t ha per immagine un piccolo intorno i' del punto $t=0$). In questo intorno i (escluso al più il punto A) la M_ν è una funzione regolare uniforme della x, senza punti singolari. Che cosa

avviene di M_ν, quando facciamo tendere, entro questo intorno, il punto x al punto A? Io dico che M_ν *tende a zero*. Infatti

$$|M_\nu| \leq \sum_\rho \left| f(S_\nu T^\rho x) \left(\frac{d\, S_\nu T^\rho x}{d\, T^\rho x}\right)^p \right| \cdot \left| \left(\frac{d\, T^\rho x}{d\,\xi}\right)^p \right| \leq H_\nu \sum_\rho \left| \frac{d\, T^\rho x}{d\,\xi} \right|^p \text{(*)}$$

dove H_ν è il massimo modulo di

$$f(S_\nu T^\rho x) \left(\frac{d\, S_\nu T^\rho x}{d\, T^\rho x}\right)^p.$$

È ben evidente che H_ν è finito. Intanto, per le ipotesi fatte sulla f, questa è una funzione limitata nell'intorno i di A, e negli intorni equivalenti. L'espressione $\frac{d\, S_\nu T^\rho x}{d\, T^\rho x}$ è poi il valore di $\frac{d\, S_\nu y}{d\, y}$ nel punto $y = T^\rho x$; se cioè S_ν è definito dalla $x' = \frac{\lambda x + \mu}{\tau x + \sigma}$, si ha:

$$\frac{d\, S_\nu T^\rho x}{d\, T^\rho x} = \frac{1}{(\tau y + \sigma)^2}, \quad \text{dove} \quad y = T^\rho x.$$

Se τ è uguale a zero, questa espressione è costante (non dipende da ρ) ed è *a fortiori* limitata. Se $\tau \neq 0$, questa espressione è uguale a $\frac{1}{\tau^2} \frac{1}{\left(y + \frac{\sigma}{\tau}\right)^2}$ dove $y = T^\rho$. Ora $\frac{1}{\tau^2}$ è una costante, ed è quindi una quantità limitata; la somma $y + \frac{\sigma}{\tau}$ è in modulo uguale alla distanza del punto $y = T^\rho x$ dal punto $-\frac{\sigma}{\tau}$, che è il trasformato del punto $x = \infty$, mediante la S_ν^{-1} (**). Questo punto è certamente *esterno* a C, mentre il punto $T^\rho x$ è interno a C per ogni valore di ρ. Quindi $\left(y + \frac{\sigma}{\tau}\right)$ non può essere infinitesimo, e perciò $\frac{1}{\left(y + \frac{\sigma}{\tau}\right)^2}$ è certamente limitato. In conclu-

(*) La serie $\sum \left| \frac{d\, T^\rho x}{d\,\xi} \right|^p$ è convergente.

(**) Il che del resto non è che un caso particolare di quanto fu detto a pag. 284-285.

ione dunque H, è finito. Ci basterà dunque dimostrare che

$$\lim \Sigma \left| \frac{d T^\rho x}{d \xi} \right|^p = 0.$$

Supponiamo, per fissare le idee, che il cerchio limite sia il cerchio $x x_0 = 1$ e che $\alpha = 1$. Affinchè la T trasformi C in sè stesso, deve essere $\gamma = i \lambda$ (λ = cost. reale). Se il punto x *si muove entro i*, avvicinandosi ad A, allora, posto $x - 1 = b + i c$, la b resta negativa, il rapporto $\frac{c}{b}$ resta compreso tra limiti finiti, e lim b = lim c = 0. Ora, posto $\xi = u + i v$, si trova che $\frac{v}{u} = -\frac{c}{b}$ resta compreso tra limiti finiti, che $u + i v = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b - i c}{b^2 + c^2}$, e quindi che $\lim u = \lim \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{b} \frac{1}{1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2} = \infty$. Poichè evidentemente

$$T^\rho x = \alpha + \frac{1}{\xi + 2\pi i \rho} \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \frac{d T^\rho x}{d \xi} = - \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{\xi + 2\pi i \rho}\right)^2$$

sarà

$$\sum_\rho \left| \frac{d T^\rho x}{d \xi} \right|^p = \left| \frac{2\pi}{\lambda} \right|^p \sum_\rho \frac{1}{[u^2 + (2\pi\rho + v)^2]^p} = \left| \frac{2\pi}{\lambda} \right|^p (U + V)$$

dove $U = \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{1}{[u^2 + (2\pi\rho + v)^2]^p}$, $\quad V = \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{1}{[u^2 + (v - 2\pi\rho)^2]^p}$

Se noi supponiamo, per fissare le idee, che $v > 0$, ne abbiamo che i termini della serie U sono minori dei termini corrispondenti della serie (convergente) $\Sigma \left(\frac{1}{2\pi\rho}\right)^{2p}$. La serie U è quindi uniformemente convergente; e, per trovarne il limite per $u = \infty$, si può passare al limite termine a termine. Si trova così $\lim\limits_{u=\infty} U = 0$. Studiamo ora la serie

$$V = \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{1}{\left[u^2 + 4\pi^2 \left(\rho - \frac{v}{2\pi}\right)^2\right]^p}.$$

Indico con $\left\{ \frac{v}{2\pi} \right\}$ il minimo intero non inferiore a $\frac{v}{2\pi}$. La

somma V_1 dei primi $\left\{\frac{v}{2\pi}\right\}$ termini della serie V non può superare evidentemente

$$\left\{\frac{v}{2\pi}\right\}\frac{1}{u^{2p}} \leq \left(\frac{v}{2\pi}+1\right)\frac{1}{u^{2p}} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{v}{u}\,\frac{1}{u^{2p-1}} + \frac{1}{u^{2p}}.$$

Per calcolare un limite superiore della serie $V - V_1$, si osservi che per $\rho > \left\{\frac{v}{2\pi}\right\}$ si ha

$$\left|\rho - \frac{v}{2\pi}\right| \geqq \left|\rho - \left\{\frac{v}{2\pi}\right\}\right|$$

cosicchè, posto $\rho = \sigma + \left\{\frac{v}{2\pi}\right\}$, si ha che ogni termine della serie $V - V_1$ è minore o uguale al termine corrispondente della serie

$$W = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{(u^2 + 4\pi^2\sigma^2)^p}.$$

Cosicchè infine si ha:

$$V \leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{v}{u}\,\frac{1}{u^{2p-1}} + \frac{1}{u^{2p}} + W.$$

Come sopra, si trova che $\lim\limits_{u=\infty} W = 0$. E, quindi, poichè $\frac{v}{u}$ è compreso tra limiti finiti, si ha $\lim\limits_{u=\infty} V = 0$. E quindi

$$\lim_{\xi=\infty} \sum_{\rho} \frac{d\,T^{\rho} x}{d\,\xi}^{\,p} = \frac{2\pi}{\lambda}^{\,p}\left[\lim_{u=\infty} U + \lim_{u=\infty} V\right] = 0.$$

All'identico risultato si perviene per v negativo.

c. d. d.

Dunque M_ν è regolare in tutto un intorno di A e si annulla in A. Considerata come funzione della variabile principale t (pag. 253), la M_ν sarà una funzione regolare in *tutto* un intorno i' del punto $t = 0$ (e si annullerà in questo punto). Essa sarà dunque sviluppabile in una serie di potenze ascendenti della t.

Perciò $Q = \left(\frac{2\pi i}{\gamma}\right)^p \sum\limits_{\nu} M_\nu$ è in i' uguale a una serie di fun-

zioni regolari in tutto i': questa serie (per i teoremi dimostrati sulle serie θ) converge assolutamente e uniformemente in qualsiasi porzione di i', che non contenga nè all'interno, nè sul contorno il punto $t = 0$. Dunque Q non ha in i' nessun punto singolare, eccetto al più il punto $t = 0$. Essa è dunque sviluppabile in una serie $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_s \alpha_s t^s$. Io dico che $\alpha_s = 0$, se $s \leq -1$. Infatti, se $s \leq -1$, si ha: $2\pi i\, \alpha_s = \int Q t^{-(s+1)} dt$, dove l'integrale è esteso a un piccolo cerchietto γ, interno a i', col centro nel punto $t = 0$. Ma lungo questo cerchio la serie $\sum\limits_s M_s$ converge uniformemente; quindi $2\pi i \alpha_s = \int Q\, t^{-(s+1)}\, dt = \sum\limits_\nu \int M_\nu\, t^{-(s+1)}\, dt$. Poichè M_ν è regolare in tutto i ed è nulla per $t = 0$, si ha $\int M_\nu t^{-(s+1)} dt = 0$. Quindi $\alpha_s = 0$ per $s \leq -1$ come avevamo enunciato.

Dunque Q è una funzione regolare in tutto i' (che è anzi nulla per $t = 0$).

La funzione θ è perciò uguale al prodotto di $(x - \alpha)^{-2p}$ *per una funzione uniforme della variabile principale t, regolare* (ed anzi nulla) *nel punto $t = 0$* (*ossia nel punto $x = \alpha$*). Dal comportamento delle serie θ, si deduce che una funzione, che sia quoziente di due serie θ, ha al massimo una singolarità polare nell'intorno di un punto qualsiasi di un campo fondamentale P, quando vi sia considerata come funzione della corrispondente variabile principale. E si capisce già da questo fatto che, se P ha un numero finito di vertici, le funzioni analitiche, invarianti per G, dedotte con le serie di Poincaré, sono identiche a quelle, che si trovano col metodo del § 37.

Poincaré ha trovato, usando la teoria dell'indicatore logaritmico, una elegante relazione tra il numero degli zeri, e quello degli infiniti di una serie θ: quanto vi è per noi di essenziale in un tal risultato, sarà ottenuto più avanti con metodo indiretto.

Le funzioni invarianti per G ottenute con i metodi del § 37, oppure i quozienti di due serie θ dello stesso grado, oppure le funzioni razionali di due o più di tali quozienti, godono dun-

que delle seguenti proprietà (quando un campo fondamentale P di G ha un numero finito di vertici):

1. ***Esse sono invarianti per il gruppo*** G.

2. ***Nell'intorno di un punto qualunque*** A ***di*** P ***o di un punto equivalente, esse presentano al più una singolarità polare, quando vengano considerate come funzioni della corrispondente variabile principale.***

Tutte le funzioni, che godono di queste due proprietà, si diranno *funzioni fuchsiane* (relative al gruppo G).

Una funzione fuchsiana φ ***(o una funzione*** θ, ***non identicamente nulla) non può possedere infiniti zeri entro un campo fondamentale*** P.

Infatti gli infiniti punti $A_1, A_2, \ldots,$ in cui θ o φ si annullassero entro P, possiederebbero almeno un punto limite A entro o sul contorno di P, che sarebbe un punto, in cui θ o φ possiederebbero una singolarità non polare. Dunque A sarebbe un punto $x = \alpha$ lasciato fisso da una trasformazione parabolica T di G, e quindi posto sul cerchio limite C. Ora nei punti A_i (non equivalenti rispetto a G), la variabile principale t, corrispondente al punto A, prende valori distinti $t_1, t_2, \ldots,$ tendenti a zero.

La funzione φ, oppure la $Q = (x - \alpha)^{2p}\theta$ sarebbero funzioni uniformi di t, nulle per $t = t_1, t_2, \ldots$, che per $t = 0$ avrebbero al massimo una singolarità polare: ciò che è assurdo, perchè $\lim_{r=\infty} t_r = 0$, e una funzione regolare, o dotata al più di una singolarità polare per $t = 0$, non può avere infiniti zeri in un intorno di $t = 0$.

Ogni funzione z, ***quoziente di due serie*** θ, ***invariante per*** G, ***ed ogni funzione razionale di tali funzioni*** z, (che sarà pure invariante per G) o, ***più in generale, ogni funzione fuchsiana riprende entro un campo fondamentale*** P ***ogni suo valore un numero finito di volte soltanto.***

La dimostrazione si compie in modo analogo al precedente. Preciseremo anche maggiormente questi risultati. Consideriamo come non distinti rispetto al gruppo G due punti equivalenti

rispetto a G. Se in un punto A la funzione $\frac{1}{\varphi}$ o $\varphi - h$ ($h =$ cost.) ha uno zero di ordine m, noi diremo che in A la φ prende m volte il valore ∞ (o il valore h), e considereremo A come la sovrapposizione di m punti infinitamente vicini, in cui φ ha il valore ∞ o il valore h.

Con queste convenzioni, i risultati precedenti si possono enunciare anche così:

Una funzione fuchsiana φ riprende ogni suo valore in un numero finito di punti distinti (rispetto a G) (i quali punti possono essere tutti, o in parte infinitamente vicini).

Anzi possiamo dire di più:

Una funzione fuchsiana φ riprende ogni valore lo stesso numero di volte.

Questo teorema è analogo ad un noto teorema della teoria delle funzioni razionali su una data superficie di Riemann; e si dimostra, come vedremo, precisamente nello stesso modo. L'ufficio, che hanno i tagli, che rendono semplicemente connessa una superficie di Riemann è, nel caso attuale, adempiuto dal contorno di un poligono fondamentale P. Siccome le funzioni fuchsiane φ, $\varphi - h$ ($h =$ cost. arbitraria) hanno gli stessi poli, e siccome $\varphi = h$ quando $\varphi - h$ è nullo, basterà dimostrare che una funzione fuchsiana ha lo stesso numero di zeri e di infiniti. Per comodità considereremo (secondo una convenzione fatta più sopra) un polo di ordine m o un punto regolare come un infinitesimo di ordine $-m$, o di ordine 0.

Con queste convenzioni, il teorema da dimostrare diventa il seguente: *La somma degli ordini degli infinitesimi di una funzione fuchsiana φ è nulla.*

Sia P un poligono fondamentale; poichè punti equivalenti per G non si considerano come distinti, noi potremo limitarci a studiare quanto avviene in questo poligono. Siano $A_1, A_2, \ldots, A_k$ i punti del contorno di P, che, o sono vertici di P, o sono zeri o poli effettivi della funzione φ. Noi potremo naturalmente considerare tutti questi punti come *vertici* di P; naturalmente però

i lati uscenti da uno di questi ***vertici*** possono formare un angolo piatto. Sui due lati $A_i A_{i-1}$, $A_i A_{i+1}$ uscenti da un punto A_i prendiamo rispettivamente due punti B_i, C_i (*), abbastanza vicini ad A_i, in guisa tale che, se i lati $A_r A_{r+1}$, $A_s A_{s+1}$ di P sono equivalenti, i punti B_{r+1}, C_r del primo siano equivalenti ai punti B_{s+1}, C_s del secondo. Congiungiamo B_i, C_i con un arco di cerchio l_i, ortogonale ai lati $A_i B_i$, $A_i C_i$. Se B_i, C_i sono abbastanza vicini ad A_i, noi potremo supporre che entro il piccolo triangolo curvilineo δ_i limitato dai tre archetti $A_i B_i$, $A_i C_i$, $B_i C_i$ la funzione φ non abbia, oltre eventualmente il punto A_i, alcun altro zero o polo effettivo. Indicheremo con P' il poligono, che si ottiene, togliendo da P tutti i triangoletti δ_i.

I lati di P' sono di due specie:

1. I lati della prima specie sono pezzi dei lati di P, a due a due equivalenti, che noi indicheremo con $\lambda_1, \lambda'_1; \lambda_2, \lambda'_2; \lambda_3, \lambda'_3 \ldots$, in guisa che i lati λ_i, λ'_i sieno tra loro equivalenti rispetto a G.

2. I lati della seconda specie sono gli archetti $l_1, l_2, \ldots, l_k$.

La somma degli ordini degli infinitesimi di φ entro P' è data dall'integrale $\int \frac{d\varphi}{\varphi}$ esteso a tutto il contorno di P', percorso in guisa da lasciare a sinistra i punti interni di P'. Ora in punti corrispondenti di due lati λ_i, λ'_i la φ ha lo stesso valore. Se M, N sono gli estremi di λ_i, e M', N' gli estremi equivalenti di λ'_i, allora, se λ_i è percorso nel verso MN, il lato λ'_i è percorso nel verso $N'M'$ (**). Quindi, nel calcolo dell'integrale $\int \frac{d\varphi}{\varphi}$, i lati λ_i, λ'_i portano contributi uguali e di segno opposto, che si eliminano. Basterà dunque che cerchiamo quale contributo portano i lati $l_1, l_2, \ldots, l_k$. Sia A_{i_1} uno dei vertici A_i; e siano p. es.

(*) Se k è il numero dei vertici di P, poniamo $A_k = A_0$, $B_k = B_0$, $C_k = C_0$, $A_{k+1} = A_1$, ecc.

(**) Infatti la trasformazione che porta MN in $M'N'$ porterà P in un poligono equivalente P''. Poichè, percorrendo λ_i nel verso MN, si lascia P a sinistra, allora, percorrendo λ'_i nel verso $M'N'$, si lascia P'' a sinistra e quindi si lascia P a destra.

$A_{t_2}, A_{t_3}, \ldots, A_{t_k}$ quelli dei vertici A, che sono equivalenti ad A_{t_1} ossia formano con A_{t_1} uno stesso ciclo, e non si devono quindi considerare come punti distinti da A_{t_1}. Come abbiamo già detto al § 36, pag. 254, noi possiamo rappresentare i triangoli $\delta_{t_1}, \delta_{t_2}, \ldots, \delta_{t_k}$ sul piano della corrispondente variabile principale t in altrettanti triangoletti, che, presi insieme, formino un unico cerchietto col centro nel punto $t = 0$. Gli archetti immagine di $l_{t_1}, l_{t_2}, \ldots, l_{t_k}$ costituiscono la periferia s di questo cerchietto; e se noi ricordiamo che l_t deve essere percorso in guisa da lasciare P a sinistra, ossia A_t a destra, vediamo facilmente che il verso corrispondente, secondo il quale resta percorso s, è quello, che lascia a destra il punto $t = 0$, immagine dei punti $A_{t_1}, A_{t_2}, \ldots, A_{t_k}$. La somma dei contributi portati dagli archetti $l_{t_1}, l_{t_2}, \ldots, l_{t_k}$ nel calcolo di $\int \frac{d\varphi}{\varphi}$ è uguale quindi all'integrale $\int \frac{d\varphi}{\varphi}$, esteso all'archetto s, percorso in guisa da lasciare a destra il punto $t = 0$. Sia $-\gamma$ il valore di questo integrale: per un noto teorema della teoria delle funzioni di variabile complessa, abbiamo che la φ, considerata come funzione della variabile principale t, avrà nel punto $t = 0$ un infinitesimo di ordine γ. (Se $\gamma = 0$, o se γ è negativo, il punto $t = 0$ sarebbe un punto di regolarità, o un polo, conformemente alle nostre convenzioni). Quindi, ricordando le definizioni da noi date più sopra, avremo che i punti $A_{t_1}, \ldots, A_{t_k}$ (che non si debbono considerare come distinti, perchè sono equivalenti rispetto a G) equivalgono per la φ a un infinitesimo di ordine γ. Quindi l'integrale $\int \frac{d\varphi}{\varphi}$, esteso al contorno di P', ossia la somma degli ordini degli infinitesimi della φ entro P', è uguale alla somma degli ordini degli infinitesimi, che la φ ha nei punti $A_1, A_2, \ldots, A_k$, cambiata di segno. Questi punti non appartengono a P', ma appartengono a P. In ogni altro punto, esterno a P', ma appartenente a P, la φ, per definizione, non può avere nè zeri, nè infiniti. Quindi: la somma degli ordini degli infinitesimi, che φ ha in P', è uguale alla somma, cambiata di

e dalla $\lambda(z_1, z_2) = 0$; ***ne risulterà dimostrato contemporanea-***
: che ogni funzione fuchsiana si può esprimere razionalmente
nezzo di funzioni θ.

ıfatti dal teorema precedente sappiamo che φ è una funzione
ırica di z_1 e di z_2. Basterà dunque dimostrare che si possono
iere z_1, z_2 in guisa che ogni funzione fuchsiana φ abbia un
valore in un punto generico $z_1 = \alpha$, $z_2 = \beta$ di F, ossia che
ı in P un *solo* punto (quando punti equivalenti di P si
derino come non distinti), in cui le funzioni z_1, z_2 assumono
istema generico di valori $z_1 = \alpha$, $z_2 = \beta$. Ora sia $x = \mu_1$,
μ_2, ..., $x = \mu_k$ un sistema di punti distinti, in cui la z_1
a comunque come quoziente di due serie θ dello stesso grado)
ne il valore generico $z_1 = \alpha$. Potremo costruire due funzioni
di uno stesso grado p, la prima delle quali diventi infinita
nto per $x = \mu_1$, mentre la seconda resti finita e differente
ero per $x = \mu_1$, ..., $x = \mu_k$ (*). Allora $z_2 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$ è infinita nel
o $x = \mu_1$, e non è infinita in alcuno dei punti $x = \mu_2$, ...,
μ_k. Esiste dunque in P un *solo* punto, in cui $z_1 = \alpha$, $z_2 = \infty$.

c. d. d.

iù avanti (§ 47) dimostreremo con altro metodo un teorema,
comprende il precedente come caso particolare.

uindi:

ogni funzione fuchsiana è una funzione razionale di z_1, z_2
ıindi *si può esprimere razionalmente mediante serie* θ).

alla precedente dimostrazione segue di più che un punto ge-
o di F corrisponde a un punto e uno solo di P, quando non si
iderino come distinti punti di P, equivalenti rispetto a G.
erciò *la superficie Riemanniana* F, o, ciò che è lo stesso,
superficie i cui punti sono in corrispondenza analitica biuni-

---

(*) La esistenza di una tale funzione θ_2 si dimostra con metodi affatto
a quelli usati al § 41, pag. 288.

voca coi punti di F si può costruire, piegando P in guisa, che punti equivalenti del suo contorno vengano a coincidere. Ecco così un'altra volta ancora ritrovata ***la tanto fondamentale analogia tra le superficie Riemanniane e i campi fondamentali con un numero finito di vertici!***

Le funzioni razionali di F non sono che le funzioni fuchsiane le quali, come dicemmo, si possono esprimere tutte razionalmente mediante le serie θ.

E dal fatto che i punti di F sono in corrispondenza biunivoca coi sistemi di punti di R', tra loro equivalenti, si deduce facilmente che: ***Le funzioni uniformi di x, invarianti per G, non sono altro che le funzioni uniformi sulla superficie Riemanniana F.***

La x, considerata poi come funzione dei punti della superficie F, immagine di P, è una funzione a infiniti valori su F, tale che da uno dei suoi valori si passa a ogni altro mediante una trasformazione lineare (del gruppo G). Questa funzione x dei punti di F è però monodroma in ogni porzione semplicemente connessa di F. Essa si puó quindi considerare come una generalizzazione degli integrali abeliani. L'unica differenza è questa: un integrale abeliano aumenta soltanto di una costante, quando si attraversa uno dei tagli, che rendono semplicemente connessa la F; la funzione x subisce invece una trasformazione lineare. Di più le coordinate z_1, z_2 dei punti della curva, di cui F è immagine, sono funzioni uniformi (fuchsiane) di x, appunto come le coordinate dei punti di una curva di genere 1 sono funzioni uniformi (ellittiche) dell'integrale abeliano di prima specie. La questione di riconoscere se per ogni curva $f(\xi, \eta) = 0$ si possa trovare un parametro x, in guisa che ξ, η siano funzioni fuchsiane uniformi di x, è caso particolare di una questione, che tratteremo più tardi. (Cap. 12).

Consideriamo ora la $\frac{d z_1}{d x}$. Poichè z_1 è invariante per G, questa derivata, quando la x subisce una trasformazione T di G, sarà moltiplicata per l'inversa del Iacobiano $D(x)$ di T. Quindi la funzione $\left(\frac{d z_1}{d x}\right)^p$ si comporta, rispetto al gruppo G, come una

funzione $\theta(f, p, x)$ (cfr. la (7) del § 39, pag. 272). Sia ora M una qualsiasi funzione uniforme della x, che soddisfi alla $M(Tx) = M(x) D^{-p}(x)$, e che nei singoli punti di R' abbia uno sviluppo in serie della stessa natura di quello, che noi in questo paragrafo abbiamo trovato per le serie θ. Allora si riconosce facilmente che $\dfrac{M}{\left(\dfrac{dz_1}{dx}\right)^p}$ è una funzione fuchsiana, e quindi è esprimibile razionalmente mediante serie θ. E altrettanto avverrà di $\dfrac{M\theta_k}{\theta_{k+p}}$, se θ_k, θ_{k+p} sono funzioni θ di grado $k, k+p$ (dove k è così grande, da assicurare la convergenza delle serie θ_k); altrettanto avverrà pure infine della funzione $\left(\dfrac{dz_1}{dx}\right)^p \dfrac{\theta_k}{\theta_{k+p}}$. Dunque:

Ogni funzione M uniforme della x, che soddisfi alla $M(Tx) = M(x) D^{-p}(x)$ (p intero), *e che in ogni punto di R' si comporti come una funzione θ, è una funzione razionale di serie θ. Ciò che avviene in particolare per $\left(\dfrac{dz_1}{dx}\right)^p$* (*).

Ogni tale funzione M si può scrivere evidentemente sotto la forma $\left(\dfrac{dz_1}{dx}\right)^p \rho$, dove ρ indica una funzione fuchsiana ossia una funzione razionale di z_1, z_2.

In particolare dunque per studiare il comportamento su F della M, o in particolare di una funzione θ, basta studiare quello di $\left(\dfrac{dz_1}{dx}\right)^p$, in quanto che sappiamo già che ρ è soltanto una funzione razionale su F. Così p. es. dal fatto che ρ ha tanti zeri quanti infiniti, si deduce che *la differenza δ tra il numero degli zeri e quello degli infiniti di M, e in particolare di una funzione θ di grado p, è uguale alla differenza tra il numero degli zeri e quello degli infiniti di $\left(\dfrac{dz_1}{dx}\right)^p$ e dipende quindi soltanto dal gruppo G e da p. Anzi δ è proporzionale, se G resta fisso, al numero p.* Una più precisa determinazione di questo numero δ è stata fatta

---

(*) Uno studio più approfondito di questo teorema si trova, con metodo differente, svolto nelle Memorie originali di Poincaré.

da Poincaré, studiando l'integrale $\int \frac{d\theta}{\theta}$, esteso al contorno di un poligono fondamentale P. Notiamo infine che i risultati ottenuti nell'ultima parte di questo paragrafo furono soltanto dimostrati nell'ipotesi che un campo fondamentale non abbia un numero infinito di lati. Lo studio di quest'ultimo caso presenta difficoltà assai gravi (*), finora insormontate.

Risultati perfettamente analoghi valgono per i gruppi fuchsiani G, per cui C non è linea singolare, e in generale per i gruppi kleiniani G (pr. dis.) il cui campo fondamentale ha un numero finito di lati. In particolare anche in questi casi vale il teorema seguente (che si potrebbe del resto dedurre dai risultati del § 37).

Le funzioni uniformi invarianti per G non sono che le funzioni uniformi sulla superficie Riemanniana F, che si ottiene piegando un poligono fondamentale P in guisa che punti equivalenti del contorno di C vengano a coincidere. Le funzioni razionali su F non sono che quelle funzioni uniformi, invarianti per G, che in ogni punto A, considerate come funzioni della corrispondente variabile principale, non hanno singolarità essenziali, e sono tutte razionalmente ottenibili mediante funzioni θ. Queste funzioni *si dicono le funzioni fuchsiane (o kleiniane) corrispondenti al gruppo G.*

§ 45. — Particolari funzioni fuchsiane e kleiniane.

Tra queste funzioni sono specialmente notevoli quelle che sono invarianti per un gruppo G di movimenti euclidei; tra queste le più conosciute sono le funzioni invarianti per un gruppo, che

(*) Le difficoltà che si incontrano provengono p. es. da ciò che è difficile studiare il comportamento delle serie θ in quei vertici di P, che sono punti limiti di infiniti altri vertici di P. La superficie Riemanniana F, immagine di P, potrebbe avere un genere infinito. Così pure non si potrebbe dimostrare (almeno coi metodi precedenti) che una funzione fuchsiana ha in P tanti zeri che infiniti ecc.

ha come campo fondamentale un parallelogrammo K, i cui lati opposti sono equivalenti. Un tale gruppo G è formato di trasformazioni del tipo

$$x' = x + m\omega + n\omega'$$

dove m, n sono interi (variabili da trasformazione a trasformazione) ed ω, ω' sono costanti del gruppo, il cui rapporto è complesso. Le funzioni corrispondenti sono le funzioni *ellittiche* di periodi ω, ω'. Se $f(x)$ è una tale funzione, anche $f'(x)$ è ancora una funzione ellittica di periodi ω, ω'; tra due funzioni ellittiche $f(x)$, $\varphi(x)$ cogli stessi periodi passa una relazione algebrica. Se il dare i valori di $f(x), \varphi(x)$ individua il punto corrispondente di K, allora la superficie riemanniana F, immagine della equazione algebrica, che lega f, φ, è in corrispondenza biunivoca coi punti di K, quando al solito non si considerino come distinti punti equivalenti del contorno di K. Ogni funzione ellittica di x, coi periodi ω, ω', p. es. f' sarà funzione razionale di F. Ora, se noi pieghiamo K in guisa che punti equivalenti del suo contorno vengano a coincidere, otteniamo evidentemente una superficie del tipo del *toro*, cioè una superficie di genere 1. Le $f(x), \varphi(x)$ saranno dunque legate da una relazione algebrica $H(f, \varphi) = 0$ di genere 1. La x considerata come funzione dei punti di F è una funzione sempre finita, tale che $\frac{dx}{df} = \frac{1}{f'}$. Ma $\frac{1}{f'}$ è una funzione razionale su F. La x sarà dunque un integrale abeliano di prima specie su F, i cui periodi sono ω, ω'.

La teoria degli integrali abeliani insegna che viceversa le funzioni razionali su una superficie di genere 1 sono funzioni ellittiche del corrispondente integrale abeliano di prima specie, il quale è determinato a meno di un fattore costante.

Altre notevoli funzioni si ottengono, partendo dai gruppi del § 34 (pag. 225) e specialmente del § 35 (pag. 239). Il campo fondamentale K di uno di questi gruppi G è somma di due poligoni P, P' adiacenti, a lati circolari, aventi a comune un lato

$A_1 A_n$ e trasformati l'uno dell'altro nell'inversione per raggi vettori reciproci T definita da questo lato. Noi potremo anzi trasformare G e K mediante una inversione per raggi vettori reciproci per modo che $A_1 A_n$ sia l'asse reale del piano della x. Se $A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ sono i residui vertici di P, e $A'_2, A'_3, \ldots, A'_{n-1}$ sono i vertici corrispondenti di P', il campo K possiede gli n cicli di vertici non accidentali formati rispettivamente dal vertice A_1, dai vertici A_i e A'_i ($i = 2, 3, \ldots, n-1$) e dal vertice A_n. Noi indicheremo con $\frac{2\pi}{l_1}, \frac{2\pi}{l_2}, \ldots, \frac{2\pi}{l_n}$ (l_i = numero intero) la somma degli angoli di K in ciascuno di questi cicli. Il poligono K è evidentemente di genere zero: esiste quindi una funzione z invariante per G, che in K assume una e una sola volta ogni suo valore. Se $x = \mathbf{z}$ è un punto del lato $A_1 A_n$, noi potremo trovare una funzione z_1, funzione lineare di z, la quale diventi in K infinita nel solo punto $x = \mathbf{z}$, in guisa che $Z = z_1 - \frac{1}{x - \mathbf{z}}$ sia regolare in K e reale nel punto $x = \mathbf{z}$. La z_1 assumerà, come la z, ogni suo valore una e una sola volta in K, e sarà invariante per G. In punti equivalenti del contorno di K, che sono trasformati l'uno dell'altro per la T, la z_1 riprenderà lo stesso valore; e altrettanto avviene di $R(x - \mathbf{z})$ (*). Quindi $R(Z)$ assume lo stesso valore in punti del contorno di K, trasformati l'uno dell'altro per mezzo della T; e, poichè essa è una funzione armonica regolare in K, essa assumerà lo stesso valore anche in punti di P, P' interni a K, e corrispondenti rispetto alla T. Ma, poichè per ipotesi $I(Z)$ è nulla in $x = \mathbf{z}$, e i due poligoni P, P' sono simmetrici rispetto all'asse reale, la funzione $I(Z)$, coniugata di $R(Z)$, assumerà valori uguali e di segno opposto in punti corrispondenti di P, P'. In altre parole la Z, e quindi anche la $z_1 = Z - \frac{1}{x - \mathbf{z}}$ assumerà valori

(*) Secondo convenzioni già usate, con $R(\mathfrak{y})$ e $I(\mathfrak{y})$ indico la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di una qualsiasi quantità complessa $\mathfrak{y}$.

immaginarii coniugati in punti corrispondenti di P, P' e quindi valori reali in tutto il segmento $A_1 A_n$. Ma, poichè la z_1 ha valori uguali in punti corrispondenti del contorno di K, anche su questo contorno, ossia su tutto il contorno di P e P', la z_1 avrà valori reali. Ora sul contorno di P la z_1 è naturalmente continua, e, come sappiamo, non può assumere due volte lo stesso valore. Ciò è soltanto possibile, se la z_1 assume ogni valore reale da $-\infty$ a $+\infty$ una e una sola volta, quando si descriva il contorno di P. Altrettanto avverrà sul contorno di P'. Poichè poi la z_1 assume in K una e una sola volta ogni valore (quando non si considerino come distinti punti equivalenti del contorno di K), la z_1 non potrà assumere alcun valore reale entro P, o P'. Quindi in uno dei poligoni P, P', p. es. in P, la z_1 assumerà una volta ogni valore, per cui $I(z_1) > 0$. In P' la z_1 assumerà una volta ogni valore, per cui $I(z_1) < 0$.

Il poligono P sarà dunque rappresentato conformemente e biunivocamente su quel semipiano p della variabile complessa z_1, per cui $I(z_1) \geqq 0$. Il contorno di P avrà per immagine l'asse reale di x. La rappresentazione sarà regolare dappertutto, eccetto che nei vertici $A_1, A_2, \ldots, A_n$ di P, che corrisponderanno a certi punti $z_1 = \alpha_1$, $z_1 = \alpha_2, \ldots, z_1 = \alpha_n$ dell'asse reale di p.

E viceversa, se noi partissimo dal problema della rappresentazione conforme di un semipiano p su un poligono $A_1 A_2 \ldots A_n$, a lati circolari, di angoli rispettivamente uguali a $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \ldots, \frac{\pi}{l_n}$, giungeremmo per nuova via alle speciali funzioni automorfe, di cui qui ci siamo occupati.

§ 46. — Funzioni fuchsiane o kleiniane legate da una relazione algebrica. Il teorema di diramazione.

Tutte le funzioni fuchsiane o kleiniane corrispondenti a uno stesso gruppo G fuchsiano o kleiniano sono a due a due legate da una relazione algebrica. E noi ci poniamo la domanda:

Quando avviene che due funzioni kleiniane (o in particolare

fuchsiane) f, φ, ***invarianti per gruppi anche distinti G, G_1, sono legate da una relazione algebrica $F(f, \varphi) = 0$?***

Indicheremo con G e con G_1 proprio i più ampii gruppi di trasformazioni lineari, che trasformano in sè stesse rispettivamente le f, φ. Indicheremo poi con G_2 il massimo sottogruppo comune a G e a G_1 (che contiene almeno la trasformazione identica). Il gruppo G_2 sarà il gruppo di tutte le trasformazioni lineari, che lasciano invariata tanto la f, che la φ. Le funzioni f, φ dovranno naturalmente avere a comune il campo K di esistenza, il quale sarà ricoperto tanto da una rete di campi fondamentali per G, quanto da una rete analoga per G_1.

Consideriamo ora la $F(f, \varphi) = 0$ come un'equazione algebrica nella f: e ne siano f_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) le radici. Se noi applichiamo alla φ le trasformazioni di G_1, la φ resta invariata, e le f_i dovranno quindi permutarsi tra di loro. Ma, poichè il numero delle possibili permutazioni su un numero finito m di quantità f_i è finito, esisterà in G_1 un sottogruppo G'_1 ***di indice finito***, che trasformerà in sè stessa ciascuna delle f_i, e quindi lascierà invariante la f. Dunque G'_1 è un sottogruppo di G_2: e quindi ***a fortiori*** G_2 è un sottogruppo di indice finito in G_1. Similmente si dimostra che G_2 è un sottogruppo di indice finito in G. E quindi:

Condizione necessaria affinchè f, φ siano legate da una relazione algebrica, è che G e G_1 abbiano a comune la regione coperta da una rete di campi fondamentali, (in cui esistono le f, φ) e abbiano a comune un sottogruppo G_2 di indice finito.

Viceversa, se queste condizioni sono soddisfatte, e se G_2 ha un campo fondamentale con un numero finito di vertici, le f, φ sono funzioni invarianti per G_2; le quali, per i teoremi del § 44 (pag. 316), sono legate da una relazione algebrica. La precedente condizione risulta quindi ***sufficiente***, quando si ammetta di più che G_2 possiede un campo fondamentale con un numero finito di vertici.

Questa ulteriore condizione è certamente soddisfatta, se al-

meno uno dei gruppi G, G_1 possiede un campo fondamentale dotato di un numero finito di vertici: ciò, che è conseguenza (cfr. anche pag. 329) dell'osservazione fatta al § 26 (pag. 161) sui campi fondamentali di un gruppo, che sia sottogruppo di indice finito di un altro gruppo Γ.

Così possiamo anche porci la seguente questione:

Sia $f(x)$ una funzione kleiniana (o fuchsiana) invariante per un gruppo kleiniano (o fuchsiano) G. Per quali trasformazioni T

$$x' = Tx = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

avviene che le funzioni $f(x)$, $\varphi(x) = f\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)$ sono legate da una relazione algebrica?

Evidentemente la funzione $\varphi(x) = f\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)$ è invariante per il gruppo $T^{-1}\,G\,T$. ***La condizione necessaria e sufficiente cercata è*** (almeno nel caso che G abbia un campo fondamentale con un numero finito di vertici) ***che i gruppi G e $T\,G\,T^{-1}$ (o, ciò che è lo stesso, i gruppi $T^{-1}G\,T$ e G) abbiano comune un sottogruppo di indice finito.***

Esempio I. — G sia il gruppo generato dalla

$$x' = x + m\,\omega + n\,\omega'$$

dove m, n sono interi variabili da trasformazione a trasformazione, ω ed ω' sono costanti il cui rapporto è complesso. Il parallelogrammo del piano della x, i cui vertici sono i punti $(0, \omega, \omega', \omega + \omega')$ è un campo fondamentale per G. Sia $f(x)$ una funzione ellittica corrispondente a un tale gruppo. Sia T la trasformazione $x' = x + a$ (a = cost. qualunque). Evidentemente T è permutabile con tutte le trasformazioni di G; e i gruppi G, $T\,G\,T^{-1}$ coincidono. Quindi $f(x)$ ed $f(x + a)$ sono funzioni algebriche l'una dell'altra; in ciò consiste il celebre ***teorema di addizione*** delle funzioni ellittiche.

Esempio II. — Ci riferiamo allo stesso gruppo G dell'esempio precedente. Sia p una costante. Quando avverrà che $f(x)$ e $f(px)$

sono legate da una relazione algebrica? Il gruppo G e il gruppo delle $x' = x + p\,(m\,\omega + n\,\omega')$ dovranno avere un sottogruppo Γ di indice finito comune. Esisteranno quindi dei numeri interi $\lambda, \mu, \nu, \rho, \lambda', \mu', \nu', \rho'$ tali che $\lambda\,\rho - \mu\,\nu \neq 0$, $\lambda'\,\rho' - \mu'\,\nu' \neq 0$, e che $\lambda\,\omega + \mu\,\omega' = p\,(\lambda'\,\omega + \mu'\,\omega')$; $\nu\,\omega + \rho\,\omega' = p\,(\nu'\,\omega + \rho'\,\omega')$. A queste due equazioni si possono evidentemente sostituire due equazioni equivalenti del tipo:

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l} N\omega = p\,(\lambda\,\omega + \mu\,\omega') \\ N\omega' = p\,(\nu\,\omega + \rho\,\omega') \end{array}\right. \qquad (N, \lambda, \mu, \nu, \rho \text{ interi; } \lambda\,\rho - \mu\,\nu \neq 0)$$

donde si trae

$$(\beta) \qquad \frac{\omega'}{\omega}\left(\lambda + \mu\,\frac{\omega'}{\omega}\right) = \nu + \rho\,\frac{\omega'}{\omega}.$$

Se $\frac{\omega'}{\omega}$ è generico, esso non soddisfa ad alcuna equazione non identica a coefficienti interi, cosicchè sarà $\mu = \nu = \lambda - \rho = 0$. E quindi $p = \frac{N}{\lambda}$ sarà un numero razionale. Viceversa, invertendo i precedenti ragionamenti, si trova che $f\,(x)$ e $f\,(p\,x)$ sono sempre legate da una relazione algebrica, se p è una costante razionale. Se invece $\frac{\omega'}{\omega}$ soddisfa a un'equazione non identica a coefficienti interi $l\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 + m\,\frac{\omega'}{\omega} + n = 0$ (l, m, n interi primi tra di loro), questa equazione sarà unica, perchè $\frac{\omega'}{\omega}$ è puramente immaginario; e in tal caso soltanto potranno esistere delle costanti p non razionali, tali che $f\,(x), f\,(p\,x)$ sieno legate da una relazione algebrica.

In ciò sono contenuti il teorema sulla moltiplicazione dell'argomento delle funzioni ellittiche generali ed i principii della teoria delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa.

Esempio III. — Il gruppo g delle trasformazioni lineari intere omogenee a coefficienti *interi* razionali, che trasforma in sè stessa la forma quadratica $\psi = p\,y_1^2 + q\,y_2^2 - r\,y_3^2$ (p, q, r interi razionali positivi), ossia il gruppo aritmetico riproduttore della ψ, individua un gruppo fuchsiano G sulla variabile

$$x = \frac{\sqrt{r}\,y_3 - \sqrt{p}\,y_1}{\sqrt{q}\,y_2}.$$

Sia g' il gruppo generato dalle trasformazioni

$$\tau\, y_i = \sum_h a_{ih}\, y_h$$

a coefficienti a_{ih} razionali (interi o fratti), che trasformano la ψ in sè stessa. La τ^{-1} sia definita dalle

$$y'_i = \sum_h A_{ih}\, y_h,$$

e sia l il più piccolo intero positivo, tale che $l\, a_{ih}$, $l\, A_{ih}$ siano numeri interi. (Il numero l varierà al variare della τ in g'). Al gruppo g' corrisponderà un gruppo G' di trasformazioni lineari sulla x. Se $y'_i = \sum_h b_{ih}\, y_h$ è una qualsiasi trasformazione u di g, la $u' = \tau\, u\, \tau^{-1}$ sarà definita dalle

$$y'_i = \sum_{h,k,t} a_{ih}\, b_{hk}\, A_{kt}\, y_t.$$

La u' apparterrà a g, se i suoi coefficienti $\sum_{h,k} a_{ih}\, b_{hk}\, A_{kt}$ sono numeri interi, ossia se

$$\sum_{h,k} (l\, a_{ih})\, b_{hk}\, (l\, A_{kt}) \equiv 0 \pmod{l^2}.$$

Ricordando che $\sum_h A_{ih}\, a_{ht} = \varepsilon_{it}$ ($\varepsilon_{ii} = 1$, $\varepsilon_{it} = 0$ per $i \neq t$), vediamo che la u' apparterrà ancora a g, almeno quando

$$b_{hk} \equiv \varepsilon_{hk} \pmod{l^2}.$$

Le trasformazioni u di g, che godono di questa proprietà, formeranno un sottogruppo γ di indice finito in g (*), a cui corrisponderà in G un sottogruppo di indice finito (comune a G e al

(*) Infatti, se noi non consideriamo come distinte due trasformazioni di g, i cui coefficienti omologhi sono congrui rispetto al modulo l^2, le trasformazioni di g si riducono a un certo numero finito m di trasformazioni distinte. Noi potremo perciò scegliere in g delle trasformazioni $u_0 = 1, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$, tali che i coefficienti di una qualsiasi trasformazione di g siano congrui (mod l^2) ai coefficienti omologhi di una e sola trasformazione u. E, se noi indichiamo con $v_0, v_1, v_2, \ldots$ le trasformazioni di γ, ne deduciamo tosto che ogni trasformazione di g si può scrivere in uno e un solo modo nella forma $u_i\, v_t$; donde segue l'affermazione del testo. (§ 3, pag. 12).

gruppo $T G T^{-1}$, trasformato di G mediante quella trasformazione T di G', che corrisponde alla trasformazione τ di g'). ***Quindi se T è una qualsiasi trasformazione di G', i gruppi G, $T G T^{-1}$ hanno comune un sottogruppo di indice finito*** (*).

Il gruppo G' contiene G come sottogruppo, ma non è pr. dis., perchè evidentemente contiene trasformazioni infinitesime.

Sia $f(x)$ una funzione invariante per un gruppo fuchsiano o kleiniano G. Tra le funzioni fuchsiane, o kleiniane, legate alla $f(x)$ da una relazione algebrica, sono specialmente notevoli le funzioni invarianti per un sottogruppo Γ, di indice finito in G. Se G ha un campo fondamentale con un numero finito di vertici, ed è di *genere zero*, queste funzioni soddisfano a un notevole *teorema di diramazione* (Verzweigungssatz), che Klein ha dimostrato nel caso particolare del gruppo modulare.

Sia N una rete di campi fondamentali (**), che G trasforma in sè stessa. Supponiamo che la regione R coperta da N sia semplicemente connessa, e che ogni campo fondamentale di N abbia un numero *finito* di lati. Noi abbiamo già visto (§ 26, pag. 161) che, se Γ è un sottogruppo di G di indice finito μ, si possono trovare in N precisamente μ campi fondamentali $K_0, K_1, \ldots, K_{\mu-1}$, in guisa che ogni altro campo di N sia equivalente, rispetto al gruppo Γ, a uno e uno solo di questi μ campi. E abbiamo pure

---

(*) Per dedurne che, se $f(x)$ è una qualsiasi funzione invariante per g, allora $f(x)$, $f(Tx)$ sono legate da una relazione algebrica, basta verificare che G possiede un campo fondamentale con un numero finito di vertici. Se $p = q = r = 1$, questo fatto è evidente, perchè in tal caso il gruppo G è il gruppo modulare (dalle (30) a pag. 83 si deduce infatti che a ogni trasformazione di g, a coefficienti interi, corrisponde una trasformazione (28) (pag. 82) di G pure a coefficienti interi). Per alcuni altri valori particolari di p, q, r nel trattato del FRICKE (vol. 1; pag. 501 e seg.) si trovano determinati i campi fondamentali del corrispondente gruppo G, e si trova che essi hanno un numero finito di vertici.

(**) La prima parte delle seguenti ricerche si estende facilmente a tutti i gruppi, che trasformano in sè stessa una rete di campi fondamentali.

visto che questi μ campi formano, considerati simultaneamente, un campo fondamentale del sottogruppo Γ. Ogni lato di uno di questi μ campi K sarà perciò equivalente, rispetto a Γ, a un lato del campo stesso, o di uno degli altri $\mu - 1$ campi K. Ripetendo considerazioni perfettamente analoghe a quelle svolte nella prima parte del § 31 (pag. 203) per i gruppi kleiniani, noi troveremo che, sostituendo a uno o più dei campi K_i dei campi equivalenti rispetto a Γ, possiamo trasformare la regione $K_0 + K_1 + \ldots + K_{\mu-1}$ in un'altra regione $H = H_1 + H_2 + \ldots + H_\nu$ $(\nu \leq \mu)$, che ancora può servire di campo fondamentale a Γ, e che gode delle seguenti proprietà:

Ognuna delle regioni parziali H_i è connessa, ed è somma di un numero finito di campi K; un lato della regione parziale H_i è equivalente a un lato della stessa regione parziale.

Noi vogliamo dimostrare che sarà $\nu = 1$. Invero, ove ciò non fosse, ogni curva che congiungesse un punto di H_1 con uno di H_2 dovrebbe incontrare infiniti campi fondamentali per Γ (*): e ciò è assurdo poichè appartenendo H_1 ed H_2 ad N una tale curva non può incontrare che un numero finito di campi fondamentali per G e quindi *a fortiori* un numero finito di campi fondamentali per Γ.

I lati di H saranno a due a due equivalenti rispetto a Γ; naturalmente lati di H equivalenti rispetto a Γ saranno pure equivalenti rispetto a G. I vertici di H si distribuiranno in cicli: vertici di uno stesso ciclo saranno equivalenti rispetto a Γ, e quindi anche rispetto a G.

Sia A un vertice di H: esso sarà lasciato fisso da un sotto-

(*) Infatti una regione equivalente, rispetto al gruppo Γ, ad H_i, e una regione equivalente ad H_j $(i \neq j)$ non possono avere alcun lato comune per ipotesi. E, poichè le regioni equivalenti ad $H_1, H_2, \ldots, H_\nu$ riempiono tutto N, se ne deduce che le regioni equivalenti ad H_1 riempiono tutta una regione connessa N_1, affatto esterna ad H_2. Una linea che congiunga un punto di H_1 a un punto di H_2 dovrebbe dunque incontrare infinite regioni equivalenti ad H_1. (Cfr. anche pag. 204).

gruppo ciclico Γ' di Γ. L'ordine n di Γ' sarà uguale a 1, o sarà un intero finito maggiore di 1, oppure sarà uguale a ∞, secondo che la trasformazione di Γ, che con le sue potenze genera Γ', è la trasformazione identica, oppure una trasformazione ellittica di periodo n, oppure una trasformazione parabolica. La somma degli angoli di H nel ciclo dei vertici equivalenti ad A sarà uguale a $\frac{2\pi}{n}$.

Ma ora A deve essere anche un vertice della rete N di campi fondamentali per G; e se K è un campo fondamentale del gruppo G, a cui appartiene il vertice A, la somma degli angoli di K nel ciclo di vertici determinato dal punto A è $\frac{2\pi}{m}$, se m è l'ordine di quel sottogruppo ciclico G' del punto G, che lascia fisso il punto A. Ora Γ' è evidentemente un sottogruppo di G'. E quindi, se m è un numero finito, l'intero n deve essere un divisore di m (§ 3, pag. 13).

Abbiamo quindi:

Se Γ è un sottogruppo di indice finito μ in G, esso possiede un campo fondamentale connesso H, che è somma di μ campi fondamentali K del gruppo G, a due a due adiacenti.

I lati di H saranno a due a due equivalenti rispetto a Γ; lati di H, equivalenti rispetto a Γ, saranno pure equivalenti rispetto a G.

I vertici di H si distribuiranno in cicli di vertici equivalenti rispetto a Γ: vertici di H, equivalenti rispetto a Γ, saranno pure equivalenti rispetto a G.

Se A è un vertice di H, e se la somma degli angoli di un campo fondamentale K per il gruppo G in un ciclo di vertici equivalenti ad A è $\frac{2\pi}{m} \neq 0$, allora la somma degli angoli di H nel ciclo di vertici, a cui appartiene A, è uguale a $\frac{2\pi}{n}$, dove n è un intero divisore di m.

A questo risultato si può, nella nostra ipotesi che G è di genere zero, dare una forma assai elegante.

Poichè, per ipotesi, G è di genere zero, esisterà una funzione z invariante per G, che assume in un campo fondamentale K di G

una e una sola volta ogni suo valore, e che nell'intorno di un qualsiasi punto di K non ha singolarità essenziali, quando la si pensi funzione della corrispondente variabile principale. Così pure esistono delle funzioni (fuchsiane o kleiniane), invarianti per Γ; e, se noi pieghiamo H in guisa che punti del contorno di H, equivalenti rispetto a Γ, vengano a coincidere, si ottiene, come abbiamo già detto più volte, una superficie F, i cui punti sono in corrispondenza biunivoca coi sistemi di punti equivalenti rispetto a Γ.

Una funzione z', fuchsiana (o kleiniana) invariante per Γ, è (considerata come funzione dei punti della F) funzione razionale sulla F.

Ora la F è scomposta in μ porzioni, ciascuna delle quali è immagine di uno dei μ campi K, di cui H è somma. E, poichè in ognuno di questi campi la z riprende una e una sola volta ogni suo valore, ciascuna delle μ porzioni, in cui è divisa la F, si può anche considerare come immagine del piano della variabile complessa z. La F si può considerare dunque come una superficie riemanniana corrispondente alla equazione algebrica, che deve legare z, z'. L'unica differenza dalle superficie Riemanniane comunemente definite è questa, che i fogli della F, anzichè essere sovrapposti, sono collocati l'uno accanto all'altro: ciò che naturalmente è senza alcuna importanza. I punti di diramazione della F sono i punti, immagine dei cicli di vertici di H. E il teorema, precedentemente dimostrato, si può enunciare così:

Se A è un punto di diramazione della F, e se esso è immagine di un vertice della rete N, che è lasciato fisso da un sottogruppo ciclico G' del gruppo G di ordine finito m, allora il numero n dei fogli, che si diramano in A è un divisore di m (*).

Noi dimostreremo ora viceversa che *ad ogni superficie Riemanniana F, che soddisfi alle precedenti condizioni, corrisponde sempre almeno un sottogruppo Γ di indice finito in G.*

(*) Il teorema riuscirà più chiaro, se si ricorda che si può supporre che ogni ciclo di vertici non accidentali di K è un ciclo di un solo vertice (§ 32, pag. 214).

A tal fine cominceremo col trasformare le condizioni sopra enunciate. Ricordiamo dapprima che ogni sostituzione su un numero finito di elementi si può scrivere come prodotto di un certo numero finito di sostituzioni circolari, tali che gli elementi, su cui opera una qualunque di queste sostituzioni, sono affatto distinti dagli elementi, su cui operano le altre.

Indicheremo poi con $z = \alpha_1$, $z = \alpha_2$, $\ldots$, $z = \alpha_h$ i valori della z nei singoli cicli di vertici di un campo K, e sia n_i $(i = 1, 2, \ldots, h)$ l'ordine di quel sottogruppo di G, che lascia fisso un vertice di K, ove $z = \alpha_i$.

Il risultato precedente si può enunciare così:

Condizioni necessarie, affinchè una funzione z' sia una funzione uniforme della x, fuchsiana o kleiniana, invariante per un sottogruppo di indice finito in G, sono le seguenti:

1. *La z' sia una funzione algebrica della z, la quale non abbia alcun punto di diramazione in un punto del piano della z, distinto dagli h punti $z = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$.*

2. *Per quei valori di i per cui n_i è un numero finito, la sostituzione, che provano i rami della z' per un giro della z nel suo piano attorno al punto $z = \alpha_i$, è un prodotto di sostituzioni circolari, l'ordine di ciascuna delle quali è un divisore di n_i.*

Noi vogliamo ora dimostrare che *queste condizioni sono anche sufficienti:* in questo risultato, e nel precedente consiste appunto il *teorema di diramazione*, a cui volevamo pervenire. Noi cominceremo a dimostrare che, se le precedenti condizioni sono soddisfatte, allora la z' è una funzione uniforme della x nella regione R ricoperta dalla rete N. Siccome per ipotesi questa regione R è semplicemente connessa, basterà dimostrare che un giro della x attorno a un punto qualsiasi A di R trasforma la z in sè stessa. Ciò è ben evidente se A non è un vertice della rete N; perchè a un tal giro della x corrisponde un giro della z nel suo piano attorno a un punto distinto da uno dei punti $z = \alpha_i$. La x non può compiere un giro attorno a un vertice di N, in cui $z = \alpha_i$, se $n_i = \infty$; un tal vertice è infatti posto

sul contorno di N (non è interno a R). Se infine la x compie un giro attorno a un vertice di R, in cui $z = \alpha_i$, e se n_i è un numero finito, allora la z compie n_i giri attorno al punto $z = \alpha_i$ e quindi la z' ritorna in sè stessa. La z' è quindi uniforme nell'intorno di ogni punto interno a R, e quindi è uniforme nella regione R del piano della x.

Dimostreremo ora che essa resta invariata per un sottogruppo Γ di indice finito nel gruppo G.

Siano infatti $z'_1, z'_2, \ldots, z'_\mu$ i μ rami della funzione z'. Se noi facciamo subire alla z una qualsiasi trasformazione di G, la z riprende lo stesso valore, e quindi le $z'_1, z'_2, \ldots, z'_\mu$ non potranno che permutarsi tra di loro. Queste permutazioni genereranno un gruppo g, isomorfo a G. Ma g (essendo un gruppo di permutazioni su un numero finito di variabili) è un gruppo discontinuo finito: l'isomorfismo tra g e G è dunque meriedrico. E a una trasformazione di g corrisponderanno infinite trasformazioni di G. Al sottogruppo γ di g, che lascia fisso la z'_i $(i \leq \mu)$, corrisponderà un sottogruppo Γ_i di indice finito in G, che lascia invariata la funzione $z'_i(x)$.

c. d. d.

Tutti questi sottogruppi Γ_i di G sono poi simili tra di loro.

Applicheremo questi risultati al caso specialmente importante del gruppo modulare G: come sappiamo i vertici delle rete corrispondente di campi fondamentali sono tutti equivalenti all'uno o all'altro dei seguenti tre punti:

$$x = i \qquad\qquad x = e^{\frac{\pi i}{3}} \qquad\qquad x = i\infty.$$

I valori corrispondenti di n sono rispettivamente:

$$n = 2 \qquad\qquad n = 3 \qquad\qquad n = \infty.$$

Facendo al più una trasformazione lineare sulla z, possiamo supporre che i valori corrispondenti della z siano rispettivamente:

$$z = 0 \qquad\qquad z = 1 \qquad\qquad z = \infty.$$

Le funzioni fuchsiane, invarianti per un sottogruppo di indice finito del gruppo modulare [funzioni modulari ellittiche (*)] ***sono tutte e sole quelle funzioni algebriche della z, che hanno per punti diramazione soltanto i punti $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$, e che sono tali che un giro attorno al punto $z = 0$, ($z = 1$) ne permuti a due a due (a tre a tre) quei rami, che non rimangono isolati.***

È questo appunto il teorema di diramazione di Klein.

Tra i sottogruppi di indice finito nel gruppo modulare sono specialmente notevoli i cosidetti ***sottogruppi congruenziali,*** di cui vogliamo ora dar breve cenno. Ricorderemo anzitutto alcuni simboli e definizioni elementari.

Sia n un numero intero primo; si dicano congrue (mod. n) due trasformazioni

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad \text{e} \qquad x' = \frac{\lambda x + \mu}{\nu x + \rho}$$

del gruppo modulare, se

$$\alpha \equiv \lambda, \ \beta \equiv \mu, \ \gamma \equiv \nu, \ \delta \equiv \rho \ (\text{mod. } n).$$

Se b, c sono due numeri interi e se $c \not\equiv 0$ (mod. n), esiste un intero a, il quale soddisfa alla

$$a\, c \equiv b \ (\text{mod. } n).$$

Questo numero *è determinato a meno di un multiplo di* n, ossia *è completamente determinato, quando non si considerino distinti due numeri congrui* (mod. n). Noi scriveremo

$$a \equiv \frac{b}{c} \ (\text{mod. } n).$$

(*) La ragione di questo nome sta in ciò che la z è l'invariante assoluto delle funzioni ellittiche, per cui x è il rapporto dei periodi. Ciò, che rende appunto specialmente importanti tali funzioni.

Si noti che la teoria delle funzioni ellittiche dà molti altri esempii di funzioni, che risolvono in casi particolari i nostri problemi fondamentali. Così p. es. la funzione $p\,(u;\, \omega, \omega_1)$ di Weierstrass, considerata come funzione dell'argomento u e dei semiperiodi ω, ω_1, è una funzione invariante per il gruppo delle trasformazioni

$$u' = u + 2\,m\,\omega + 2\,n\,\omega_1, \quad \omega' = \alpha\,\omega + \beta\,\omega_1, \quad \omega'_1 = \gamma\,\omega + \delta\,\omega_1$$
$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, m, n \text{ numeri interi}) \qquad (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 1).$$

Se $c \equiv 0$ (mod. n), $b \not\equiv 0$ (mod. n), noi indicheremo con $\frac{b}{c}$ lo ∞; se $c \equiv b \equiv 0$ (mod. n), noi considereremo $\frac{b}{c}$ come un simbolo indeterminato, appunto perchè, se a è un qualsiasi intero, $a\,c$ è sempre congruo a b (mod. n). Consideriamo ora la trasformazione

$$y' \equiv \frac{\alpha\, y + \beta}{\gamma\, y + \delta} \text{ (mod. } n) \tag{13}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono interi soddisfacenti alla

$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma \equiv 1 \text{ (mod. } n).$$

E, secondo la convenzione già fatta, riguarderemo come identici due numeri interi, congrui tra loro (mod. n). La y non potrà avere che $n + 1$ valori distinti

$$0, 1, 2, \ldots, n - 2, n - 1, \infty.$$

Se $y \not\equiv \infty$, la y' sarà quello dei precedenti $n + 1$ numeri che soddisfa alla

$$(\gamma\, y + \delta)\; y' \equiv (\alpha\, y + \beta) \text{ (mod. } n)$$

(cosicchè, per le nostre convenzioni, si avrà $y' \equiv \infty$, se $\gamma\, y + \delta \equiv 0$ (mod. n) (*)). Se poi $y \equiv \infty$, si indicherà con y' quello dei numeri $0, 1, \ldots, n - 1, \infty$, che soddisfa alla

$$\gamma\, y' \equiv \alpha \text{ (mod. } n)$$

cosicchè, in tal caso, $y' \equiv \infty$, soltanto se $\gamma \equiv 0$ (mod. n).

Si noti che con queste convenzioni a valori distinti di y (mod. n), corrispondono valori distinti di y'. La trasformazione (13) definisce quindi una sostituzione sugli $n + 1$ indici

$$0, 1, 2, \ldots, n - 1, \infty.$$

Tutte queste sostituzioni generano un gruppo finito g, che è

(*) Si osservi, che non può essere $\gamma\, y + \delta \equiv \alpha\, y + \beta$ (mod. n), perchè $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma \equiv 1$ (mod. n).

evidentemente in isomorfismo meriedrico col gruppo modulare G. L'isomorfismo si ottiene, facendo corrispondere a una trasformazione

$$x' = \frac{\lambda x - \mu}{\nu x - \rho}$$

del gruppo G, la trasformazione

$$y \equiv \frac{\lambda y - \mu}{\nu y - \rho} \pmod{n}$$

del gruppo g. Le trasformazioni del gruppo G, a cui corrispondono in g delle trasformazioni appartenenti a un sottogruppo γ di g, genereranno un sottogruppo Γ di G. La ricerca di tutti i sottogruppi di g, che è una ricerca puramente algebrica già completamente effettuata *), si può quindi considerare come un metodo per trovare dei sottogruppi del gruppo modulare.

I sottogruppi che si trovano in tal modo, si possono definire mediante congruenze, onde hanno ricevuto il nome di *sottogruppi congruenziali*. Tra questi sottogruppi i più importanti si ottengono nel seguente modo. Tra i sottogruppi γ di g vi è quel sottogruppo, che è formato dalla sola trasformazione identica

$$y \equiv y \pmod{n}.$$

Il sottogruppo Γ di G corrispondente è formato dalle trasformazioni $x' = \frac{\alpha x - \beta}{\gamma x - \delta}$, per cui $\alpha - 1 \equiv \beta \equiv \delta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{n}$, ossia da quelle trasformazioni di G che sono congrue all'identità mod. n.

Queste trasformazioni, per i teoremi del § 3, pag. 14, (e come si può riconoscere anche direttamente) generano un sottogruppo Γ *invariante* di G, che si può chiamare il sottogruppo congruenziale principale mod. n.

*) Cfr. p. es. le *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen* di Klein e Fricke.

§ 47. — I teoremi di Weierstrass.

Questo paragrafo è dedicato alla estensione alle funzioni automorfe di due teoremi, che Weierstrass diede per le funzioni più volte periodiche, e che noi nei precedenti paragrafi abbiamo già dimostrato per le funzioni fuchsiane e kleiniane.

Prima di enunciare e dimostrare i nostri teoremi, ricorderemo alcune definizioni, e alcuni lemmi. Diremo che una funzione f di due variabili x_1, x_2 si comporta come una funzione razionale in un punto A di coordinate $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, se in un intorno abbastanza piccolo del punto $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, la f è uguale al quoziente $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ di due serie ordinate secondo le potenze nulle o positive di $(x_1 - \alpha_1)$, $(x_2 - \alpha_2)$. Se nel punto $x_i = \alpha_i$ $(i = 1, 2)$ la φ_2 è nulla, e se è ***impossibile*** scrivere in un intorno di questo punto la f come quoziente $\frac{\psi_1}{\psi_2}$ di due serie ψ_1, ψ_2 ordinate secondo le potenze non negative delle $x_i - \alpha_i$, tali che nel nostro punto sia $\psi_2 \neq 0$ (*) noi diremo che la f possiede una ***singolarità straordinaria*** (*non* essenziale) nel punto $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$. Se in questo punto si ha $\varphi_1 \neq 0$, allora questo punto è detto una singolarità di prima specie, o anche un ***polo***, o un ***punto di infinito*** per la funzione f.

Se invece nel punto $x_i = \alpha_i$ è pure $\varphi_1 = 0$, e se è ***impossibile*** scrivere in un intorno di questo punto la f come quoziente $\frac{\psi_1}{\psi_2}$ di due serie ψ_1, ψ_2 ordinate secondo le potenze non negative di $(x_1 - \alpha_1)$, $(x_2 - \alpha_2)$, tali che nel punto $x_i = \alpha_i$ sia $\psi_1 \neq 0$, $\psi_2 = 0$ (**) allora il punto $(x_i = \alpha_i)$ si dirà un punto ***straordinario di seconda specie***, o anche un ***punto di indeterminazione*** della f.

(*) Ciò avverrebbe, se fosse $\varphi_1 = R\psi_1$, $\varphi_2 = R\psi_2$, dove $R = 0$, $\psi_2 \neq 0$ nel punto $x_i = \alpha_i$, e se R, ψ_2, ψ_1 fossero serie ordinate secondo le potenze non negative di $x_1 - \alpha_1$, $x_2 - \alpha_2$.

(**) Cfr. la nota precedente. In tal caso si direbbe naturalmente ancora che la f ha un polo nel punto $x_i = \alpha_i$.

In un intorno di un punto di indeterminazione A la f può anche assumere ogni valore: ciò, che dimostra esistere una qualche analogia tra questi punti singolari, e i punti singolari essenziali per le funzioni analitiche di una sola variabile; la analogia è però soltanto superficiale, in quanto che, se noi ci accostiamo a un punto di indeterminazione A lungo un cammino analitico, regolare in A, la f tende a un valore determinato; e se poniamo $x_2 - \alpha_2 = h\,(x_1 - \alpha_1)$ ($h =$ cost.), la f diventa una funzione di $x_1 - \alpha_1$, che per $x_1 = \alpha_1$ ha al massimo una singolarità polare.

Per dare qualche esempio, si noti che $\frac{1 + x_2}{x_1}$ ha una singolarità polare per $x_2 = x_1 = 0$, un punto di indeterminazione per $x_2 = -1$, $x_1 = 0$. Si noti che soltanto apparentemente le funzioni $\frac{x_2\,(1 + x_1)}{x_2\,(1 + x_2)}$, $\frac{x_2\,x_1}{x_2^2\,(1 + x_2)}$ hanno un punto di indeterminazione per $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. In realtà, essendo queste due funzioni uguali rispettivamente a $\frac{1 + x_1}{1 + x_2}$, $\frac{x_1}{x_2(1 + x_2)}$, esse hanno per $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ rispettivamente un punto di regolarità, e un polo.

Se una funzione f delle x_1, x_2 si comporta come funzione razionale in *ogni* punto di un campo perfetto R, si suol dire che la f si comporta come *una funzione razionale in R.* Ricordo che R si dice perfetto (§ 17, pag. 114), se ogni punto limite di R appartiene a R.

Definizioni, e considerazioni perfettamente analoghe si possono svolgere per le funzioni di $n > 2$ variabili.

Ricorderò ora alcuni teoremi, che si estendono essi pure facilmente alle funzioni di $n > 2$ variabili.

Lemma I. — *Se una funzione u di 2 variabili x_1, x_2 si comporta come una funzione razionale in un punto A ($x_i = \alpha_i$), in un intorno abbastanza piccolo di A non può esistere alcun punto di indeterminazione, oltre eventualmente al punto A.* Se A non è un punto di indeterminazione, il teorema è evidente; infatti in un intorno abbastanza piccolo di A si ha $u = \frac{P_1}{P}$, dove almeno una delle

serie P_1, P_2 è differente da zero nel punto A, e quindi anche in un intorno abbastanza piccolo di A. Supponiamo invece che sia $P_1 = P_2 = 0$ nel punto A, ossia che A sia un punto di indeterminazione.

L'equazione $P_1 = 0$ per un noto teorema di Weierstrass (*) si scomporrà in un intorno di A in una o più equazioni, in numero finito,

$$p_1 = 0,\ p_2 = 0, \ldots, p_{k_1} = 0,$$

ciascuna delle quali definirà $x_2 - \alpha_2$ come funzione algebroide di $x_1 - \alpha_1$; la p_1 sarà cioè un polinomio nella $x_2 - \alpha_2$, i cui coefficienti sono funzioni analitiche regolari di $x_1 - \alpha_1$ in un intorno di A. E precisamente sarà

$$P_1 = p_1^{(1)} p_2^{(1)} \ldots . p_{k_1}^{(1)} Q_1,$$

dove Q_1 è una serie di potenze (positive) delle $x_1 - \alpha_1$, $x_2 - \alpha_2$ non nulla per $x_i = \alpha_i$. In modo analogo si troverà

$$P_2 = p_1^{(2)} p_2^{(2)} \ldots . p_{k_2}^{(2)} Q_2 \qquad (Q_2 \neq 0 \text{ per } x_i = \alpha_i).$$

Alcuni dei fattori $p^{(1)}$ possono essere uguali ad alcuni dei fattori $p^{(2)}$. In tal caso questi fattori comuni si possono sopprimere senz'altro, senza che muti il quoziente $\frac{P_1}{P_2}$. E noi potremo quindi ammettere che ogni fattore $p^{(1)}$ sia distinto da tutti i fattori $p^{(2)}$. La curva definita annullando uno dei fattori $p^{(1)}$ può avere in un intorno di A soltanto un numero finito di punti comuni con la curva, che si definisce annullando uno dei fattori $p^{(2)}$. Infatti due equazioni $p^{(1)} = 0$, $p^{(2)} = 0$ possono essere soddisfatte simultaneamente soltanto per quei valori della x_1, che annullano il ***risultante*** di $p^{(1)}, p^{(2)}$; il quale risultante è una serie ordinata secondo le potenze non negative di $(x_1 - \alpha_1)$, convergente per $(x_1 - \alpha_1)$ abbastanza piccolo, e non è identicamente

---

(*) BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa delle funzioni ellittiche*, pag. 200.

Se per caso P_1 o P_2 fosse identicamente nulla per $x_1 = \alpha_1$, si farebbe una tale trasformazione lineare di variabili che questo più non avvenga.

nullo, perchè per ipotesi le equazioni $p^{(1)} = 0$, $p^{(2)} = 0$ sono distinte e irriducibili. Esso quindi in un intorno del punto $x_1 = \alpha_1$ ha al più un numero finito di zeri. Quindi le curve $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ hanno in un intorno α di A solo un numero finito di punti comuni; e quindi, se α è abbastanza piccolo, A sarà l'unico punto di indeterminazione, che esista in α. Quindi, se u si comporta come funzione razionale in un campo perfetto R, nessun punto di R potrà essere punto limite di infiniti punti di indeterminazione; e quindi ***in R esiste al più un numero finito di punti di indeterminazione*** (*).

Lemma II. — *Se in un punto A ($x_i = \alpha_i$) due funzioni f_1, f_2 delle x_1, x_2 si comportano come funzioni razionali delle x_i, e se in ogni intorno di A esistono infiniti punti distinti, in cui è soddisfatto il sistema di equazioni $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$, allora dal punto A esce una curva analitica, lungo la quale è sempre $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$.*

In un intorno di A si può porre per ipotesi $f_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, $f_2 = \frac{\varphi_3}{\varphi_4}$ dove le φ sono serie ordinate secondo le potenze non negative di $x_1 - \alpha_1$, $x_2 - \alpha_2$. Le nostre equazioni equivalgono alle

$$\varphi_1 - a_1 \varphi_2 = 0 \qquad\qquad \varphi_3 - a_2 \varphi_4 = 0.$$

Per il teorema di Weierstrass citato più sopra la prima di queste equazioni si decompone in un numero finito h_1 di equazioni algebriche nella $x_2 - \alpha_2$:

$$p_1^{(1)} = 0,\ p_2^{(1)} = 0, \ldots,\ p_{h_1}^{(1)} = 0.$$

La seconda si scomporrà pure in un numero finito h_2 di equazioni algebriche nella $x_2 - \alpha_2$:

$$p_1^{(2)} = 0, p_2^{(2)} = 0, \ldots, p_{h_2}^{(2)} = 0;$$

dove dunque le p sono polinomii nella $x_2 - \alpha_2$, i cui coefficienti sono

(*) Se si trattasse di una funzione di n **variabili, esisterebbe al** più un numero finito di varietà a **non più che $n - 2$ dimensioni, i** cui punti sono punti di **indeterminazione.**

serie ordinate secondo le potenze non negative di $(x_1 - \alpha_1)$ (*). Se da A non esce alcuna curva, lungo $f_i - a_i = 0$, ossia se ognuno dei polinomii $p^{(1)}$ è distinto da ognuno dei polinomii $p^{(2)}$, allora le nostre due equazioni possono essere soddisfatte soltanto per un numero finito di sistemi di valori per le x_1, x_2. (Cfr. la dimostrazione del Lemma I).

Lemma III. — *Se la funzione u delle x_1, x_2 si comporta nella regione perfetta R come una funzione razionale, l'equazione $u = 0$ è soddisfatta al più nei punti di un numero finito di curve di R.*

Infatti, se A è un punto di R, in un intorno α di A $(x_i = \alpha_i)$ si può porre $u = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, dove le φ sono serie di potenze non negative delle $x_i - \alpha_i$. I punti di α, in cui $u = 0$, soddisfano alla $\varphi_1 = 0$; e, per il citato teorema di Weierstrass, questa equazione si scompone al più in α in un numero *finito* di equazioni algebriche nella $x_2 - \alpha_2$. In α penetra quindi al più un numero *finito* di curve, lungo cui $u = 0$.

Nessun punto A di R può essere quindi punto limite di curve, ove $u = 0$; donde segue il teorema enunciato.

Lemma IV. — *Se u_1, u_2 si comportano nella regione perfetta R come funzioni razionali, esistono in R al più un numero finito di punti isolati, e di curve, ove $u_1 = u_2 = 0$* (**).

Infatti dal II lemma segue tosto che i punti *isolati* di R, in cui $u_1 = u_2 = 0$ non possono avere alcun punto limite A, e quindi sono in numero finito. Dal lemma III segue poi che le curve di R, lungo cui $u_1 = u_2 = 0$ sono pure in numero finito.

c. d. d.

(*) Almeno ci possiamo sempre ridurre a questo caso con una trasformazione lineare sulle x_1, x_2 (cfr. la nota a pag. 339).

(**) Un teorema analogo vale per i sistemi di equazioni $u_1 = u_2 = \dots = u_m = 0$, dove le u_i sono funzioni di n variabili, che si comportano come funzioni razionali dei punti di R. Si dimostra cioè che queste equazioni possono essere in R soddisfatte soltanto in un numero *finito* di varietà analitiche a non più di $n - 1$ dimensioni.

Notiamo di più che, *se* $u_1 = u_2 = 0$ *lungo una certa curva* C, *allora lungo questa curva si ha* $\frac{\partial u_i}{\partial x_1} d x + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} d x_2 = 0$ $(i = 1, 2)$, *cosicchè lungo questa curva il Iacobiano di* u_1, u_2 *è nullo.* E notiamo che, *se* u_1, u_2 *si comportano in* R *come funzioni razionali, altrettanto avviene del loro Iacobiano.*

Siano u_1, u_2 due funzioni indipendenti delle variabili x_1, x_2, che in ogni punto del campo perfetto R si comportano come funzioni razionali, e sono regolari (non hanno cioè nè punti di infinito, nè punti di indeterminazione). Siano a_1, a_2 due costanti tali che in R le equazioni $u_1 - a_1 = u_2 - a_2 = 0$ siano soddisfatte soltanto in punti isolati: questi punti, per i nostri lemmi, saranno in numero finito. È noto che, se R' è la regione immagine di R nello spazio, in cui sono coordinate non omogenee la parte reale, e il coefficiente della parte immaginaria delle x_1, x_2, il numero h si può esprimere sotto forma di un integrale esteso al contorno di R', il cui integrando è una espressione del tipo $\frac{P}{[\Sigma \overline{u_i - a_i}^2]^m}$, dove P è una funzione razionale delle $u_i - a_i$ e delle loro derivate, m è una costante (*). Questo integrale, che

---

(*) La teoria dell'integrale logaritmico di Cauchy per le funzioni analitiche di una sola variabile è stata generalizzata da Kronecker (cfr. PICARD, *Traité d'Analyse*, 2.ª ed. T. I, pag. 136, e T. II, pag. 205) ai sistemi di n equazioni $f_1 = f_2 = \ldots\ldots = f_n = 0$ di n incognite $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n$ reali. Sia S lo spazio, ove le x sono coordinate cartesiane, e sia R' una regione di questo spazio, ove le f sono funzioni regolari; se il Iacobiano delle f rispetto alle x ha in R' sempre uno stesso segno, e se i punti A di R' che soddisfano alle nostre equazioni sono in numero finito e sono interni a R, il loro numero è dato da un integrale esteso al contorno di R', il cui integrando è una frazione che ha per numeratore una espressione razionale nelle f_i e nelle loro derivate, e per denominatore una potenza di Σf_i^2. Questo teorema vale, se il Iacobiano delle f_i rispetto alle x_i è differente da zero nei punti A; un punto A, in cui questo Iacobiano fosse nullo, si deve contare tante volte, quanta è la sua moltiplicità (cfr. più avanti nel testo). Ora uno zero comune alle $u_1 - a_1 = f_1 + i f_2$, $u_2 - a_2 f_3 + i f_4$ (se u_1, u_2 sono funzioni analitiche delle $x_1 = \xi_1 + i \xi_2$, $x_2 = \xi_3 + i \xi_4$) individua un sistema di valori per le ξ, che annulla le funzioni f_1, f_2, f_3, f_4. E il Iacobiano delle f_i rispetto alle ξ_i non è mai negativo, perchè è uguale al prodotto del Iacobiano $\frac{\partial(u_1 - a_1, u_2 - a_2)}{\partial(x_1, x_2)}$ per il Iacobiano immaginario coniugato.

noi, indicheremo con $I(R, u_1, a_2)$ è l'integrale di Kronecker, ed è per la teoria delle funzioni analitiche di due variabili l'analogo dell'integrale logaritmico di Cauchy per le funzioni analitiche di una sola variabile. L'integrale di Cauchy serve a trovare il numero degli infinitesimi di una funzione analitica di una sola variabile: l'integrale di Kronecker a trovare il numero degli zeri comuni a due funzioni $u_1 - a_1$, $u_2 - a_2$. Per l'esatta intelligenza del teorema di Kronecker si noti che, come un punto A, in cui una funzione u di una sola variabile x si annulli, può contare per più infinitesimi, ossia essere un infinitesimo multiplo (per il che deve essere $\frac{du}{dx} = 0$), così un punto A, in cui si annullino due funzioni $u_1 - a_1$, $u_2 - a_2$ di due variabili x_1, x_2, può contare per più infinitesimi, ossia essere, come si suol dire, un infinitesimo multiplo (affinchè questo avvenga, è necessario che il Iacobiano $\frac{d(u_1, u_2)}{d(x_1\, x_2)}$ sia nullo nel punto A). E, se A è un infinitesimo delle due funzioni $u_1 - a_1$, $u_2 - a_2$, si potrà definire la moltiplicità (il carattere, l'ordine) dell'infinitesimo A come il valore n dell'integrale $I(\lambda, a_1, a_2)$ relativo a un intorno λ sufficientemente piccolo del punto A. Se noi facciamo variare di pochissimo le a_1, a_2, il nostro integrale, che è una funzione continua delle a_1, a_2, e che è un numero intero, dovrà conservare lo stesso valore n. Nell'intorno λ esistono quindi n punti (in generale a due a due distinti (*)) ove le u_1, u_2 assumono dei valori b_1, b_2, abbastanza poco differenti da a_1, a_2. Si trova così che esiste una perfetta analogia tra la attuale definizione, e la definizione che si dà dell'ordine, o moltiplicità di un infinitesimo per le funzioni di una sola variabile. E si ha proprio che $I(R, a_1, a_2)$ è il numero degli infinitesimi comuni alle $u_1 - a_1$, $u_2 - a_2$ nel

(*) Poichè il Iacobiano delle u_1, u_2 non è identicamente nullo, esso sarà differente da zero in un punto generico B di λ. Quindi, se in B si ha $u_i = b_i$ $(i = 1, 2)$, il punto B è un infinitesimo *semplice* per la coppia di funzioni $u_1 - b_1$, $u_2 - b_2$.

campo R, quando ognuno di essi si computi tante volte, quanta è la sua moltiplicità.

Premessi questi lemmi, noi vogliamo enunciare i teoremi di Weierstrass.

Sia G un gruppo discontinuo su n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che possegga una rete N di campi fondamentali. E sia K_0 un campo di questa rete. Supponiamo di essere in uno dei casi, in cui si è dimostrata la convergenza delle serie θ. In tali casi noi sappiamo che si possono costruire n funzioni uniformi, invarianti per G. Se K non ha alcun punto comune con le varietà limiti della regione occupata da N, allora noi sappiamo che ognuna di queste n funzioni *si comporta nell'intorno di ogni punto di K come una funzione razionale delle x.*

Ciò non avviene invece più, se K ha qualche punto A comune con le varietà limiti di N. Se ciò avviene, si può però in qualche caso dimostrare che *per ogni punto A di K si possono trovare n funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tali che*

1. *Le n funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ si annullano nel punto A.*

2. *Se α è quella porzione di un intorno di A, che è interna a K, e se in un punto di α è $y_i = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, esiste in α al più un numero limitato di punti, in cui $y_i = \lambda_i$.*

3. *Le funzioni, invarianti per G, da noi costruite, si comportano nel punto A come funzioni razionali delle y_i.*

L'esistenza di tali variabili y per ogni punto A di K è stata dimostrata finora soltanto in casi particolari, p. es. nel caso studiato nei precedenti paragrafi di $n = 1$. In tal caso infatti si può assumere come variabile y_1 la variabile principale corrispondente al punto A (*).

(*) Per $n \gtrdot 1$ il teorema si può estendere facilmente ai gruppi fuchsiani misti, di cui diede il primo esempio BLUMENTHAL (*Math. Ann.* Tomo 56, pag. 509). Per qualche gruppo iperfuchsiano il teorema in discorso è stato dato da PICARD (*Acta Mathem.* Tomo 5).

Le seguenti considerazioni si applicano soltanto a quei gruppi G, tali che per ogni punto di K si possano trovare le corrispondenti variabili y, in guisa da soddisfare alle condizioni suaccennate. E ricordiamo che esse valgono quindi in particolare se K non ha punti comuni col contorno di N (nel qual caso si può per ogni punto A di K supporre $y_i = x_i$), ciò che avviene p. es. se siamo in uno dei casi, in cui si è dimostrata la convergenza delle serie ξ di Poincaré. Ciò avviene anche per i gruppi G del § 42 (pag. 292), generati da $2n$ traslazioni indipendenti; per essi appunto Weierstrass ha dato per la prima volta i teoremi, di cui qui ci occuperemo.

Noi anzi supporremo nel seguito che le y_i corrispondenti a un punto A di K siano tali che in quella parte di un intorno di A, che è interna a K, non esistano due punti distinti, in cui ciascuna delle y riprenda lo stesso valore; il caso più generale si studia con gli stessi metodi, e con poche modificazioni.

Dalle nostre ipotesi segue, in virtù dei lemmi precedenti che, se $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sono n funzioni indipendenti invarianti per G costruite mediante serie θ, allora in un intorno di un punto A di K *non possono esistere infiniti punti isolati*, in cui le u_i ricevono un sistema di valori $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dati ad arbitrio. Noi potremmo anzi nelle seguenti considerazioni imporre questa condizione al nostro gruppo G, anzichè ammettere per ogni punto di K l'esistenza delle citate variabili y.

Noi diremo che *una funzione invariante per G, che in ogni punto di K si comporta come una funzione razionale delle corrispondenti variabili y, è una funzione razionale di K.* Queste funzioni sono per $n > 1$ le analoghe delle funzioni fuchsiane e kleiniane, corrispondenti a gruppi G su una sola variabile. Noi sappiamo già che:

1. *Esistono n funzioni razionali di K indipendenti* (§ 41, pag. 288).

E noi dimostreremo:

2. *Tra $n + 1$ funzioni razionali di K passa sempre almeno una relazione algebrica.*

3. *Si possono* (in infiniti modi) *trovare* $n + 1$ *funzioni* $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ *razionali di* K, *legate da una sola relazione algebrica*

$$g(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = 0$$

tali che tutte e sole le funzioni razionali di K *sono esprimibili come funzioni razionali delle* $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$.

Anzi di più:

I punti di K *sono in corrispondenza analitica biunivoca e continua coi punti della varietà algebrica* $g = 0$, *quando naturalmente non si considerino come distinti punti del contorno di* K *tra di loro equivalenti. Le funzioni uniformi invarianti per* G *sono tutte e sole le funzioni uniformi su questa varietà algebrica: e tra esse le funzioni razionali di* K *sono tutte e sole le funzioni razionali su questa varietà algebrica.*

Restano così estesi a gruppi assai più ampii le relazioni trovate tra i gruppi fuchsiani e kleiniani, e le curve algebriche (superficie Riemanniane): esse potranno forse essere il punto di partenza per ulteriori sviluppi della teoria, e in particolare per la generalizzazione ad $n > 1$ dei risultati fondamentali, che nel capitolo seguente troveremo nel caso $n = 1$.

Per fissare le idee e per semplicità ci limiteremo al caso di $n = 2$. Il caso generale si studia con metodi affatto simili (*).

Osserveremo anzitutto che alle funzioni razionali di K si estendono facilmente i lemmi dimostrati sopra per le funzioni, che si comportano come funzioni razionali in un campo perfetto R.

(*) Il caso di n qualunque è stato studiato da POINCARÉ (*Acta Mathem.* vol. 26, pag. 43 e seg.) e da BLUMENTHAL (*Math. Ann.* tomo 58, pag. 497 e seg.), dove il lettore troverà numerose citazioni bibliografiche. L'unica differenza tra il caso qui studiato, e il caso di $n > 2$ sta in ciò, che mentre noi incontreremo soltanto o equazioni, o coppie di equazioni in due incognite, nel caso di n qualunque si possono trovare sistemi di m equazioni in $n \geq m$ incognite. La teoria di questi sistemi è svolta in BLUMENTHAL (loc. cit. tomi 57 e 58), e porta a risultati affatto simili a quelli, che noi incontreremo.

Le dimostrazioni continuano a valere inalterate, purchè nella considerazione di un intorno di un punto di K alle variabili x_1, x_2 si sostituiscano le variabili y_1, y_2.

Siano ora u_1, u_2 due *funzioni razionali di K.* Consideriamo il sistema di equazioni

$$u_1 - a_1 = u_2 - a_2 = 0 \qquad (a_1 = a_2 = \text{cost.}).$$

E sia p un piano, ove u_1, u_2 sono variabili coordinate. A ogni punto (a_1, a_2) di p corrisponderà una coppia di equazioni, e viceversa. Noi ci chiediamo:

A quali punti di p corrisponde una coppia di equazioni con infinite soluzioni entro il poligono K?

Per quanto abbiamo detto, ciò può soltanto avvenire, se le due equazioni sono soddisfatte lungo una stessa curva, lungo la quale dovrà anche essere nullo il Iacobiano Δ delle u_1, u_2. Ma, se noi supponiamo *che le u_1, u_2 siano indipendenti,* ossia che Δ non sia identicamente nullo, l'equazione $\Delta = 0$ definisce per i lemmi precedenti al più un numero *finito* di curve di K. Esiste dunque in K al più un numero *finito* di curve, lungo le quali può avvenire che u_1, u_2 conservino rispettivamente uno stesso valore a_1, a_2. *I punti di p, cui corrisponde una coppia di equazioni avente infinite soluzioni in K, sono dunque in numero finito.* Noi li chiameremo i *punti singolari* di p.

Così pure i punti di indeterminazione, che u_1 ha in K sono in numero finito; siano $a_2^{(1)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_2^{(m_1)}$ (m_1 = intero finito) i valori che u_2 assume in essi; le equazioni $u_2 = a_2^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ definiscono certe curve γ in p. Altre curve γ, in numero finito, si determinano, considerando i punti singolari di u_2 in p. Se $a_1^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m_2$; m_2 intero finito) sono i valori, assunti in essi da u_1, le nuove curve γ considerate sono le curve $u_1 = a_1^{(i)}$. Noi indicheremo tutte queste curve complessivamente con $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, e le diremo le *curve singolari* di p.

Affinchè queste ultime considerazioni siano legittime, si deve supporre che le u_1, u_2 non abbiano punti di indeterminazione

comuni. Noi dobbiamo quindi ora completare il nostro studio, per il caso che le u_1, u_2 abbiano qualche punto di indeterminazione comune.

Sia A un tale punto. In un intorno di A sarà

$$u_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \qquad u_2 = \frac{\varphi_3}{\varphi_4},$$

dove le φ sono serie ordinate secondo le potenze delle corrispondenti variabili y_1, y_2, le quali si annullano nel punto A, ossia per $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Le equazioni $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$ equivalgono in un intorno α sufficientemente piccolo di A rispettivamente a due equazioni *algebriche* in y_2, i cui coefficienti sono funzioni analitiche regolari di y_1, a_1 e di y_1, a_2 (*). Se noi eliminiamo y_2 tra queste due equazioni otterremo una risultante $R(y_1, a_1, a_2) = 0$, dove R è in un intorno di $y_1 = 0$ una funzione analitica regolare di y_1, a_1, a_2, la quale deve essere identicamente nulla per $y_1 = 0$, in quanto che per $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ sono identicamente soddisfatte le $\varphi_1 - a_1 \varphi_2 = \varphi_3 - a_2 \varphi_4 = 0$. La R avrà dunque un fattore y_1^λ ($\lambda \geq 1$). Poniamo $\frac{R}{y_1^\lambda} = R'(y_1, a_1, a_2)$, $R''(a_1, a_2) = R'(0, a_1, a_2)$. L'annullarsi di R'' ci dà la condizione necessaria e sufficiente, affinchè in ogni intorno del punto A le u_1, u_2 acquistino dei valori vicini a piacere rispettivamente alle a_1, a_2; cosicchè R'' è una funzione effettiva delle a_1, a_2. Se b_1, b_2 sono invece un sistema di valori delle a_1, a_2, che non soddisfa alla $R'' = 0$, esiste un intorno abbastanza piccolo di A, in cui la $|u_1 - b_1| + |u_2 - b_2|$ ha un limite inferiore diverso da zero. Ciò che noi esprimeremo dicendo che la $R''(a_1, a_2) = 0$ definisce i valori a_1, a_2 assunti dalle u_1, u_2 nel punto A. Al nostro punto A corrisponde dunque un certo numero finito di curve in p, definite dalla $R''(u_1, u_2) = 0$. Se $u_1 - a_1 = u_2 - a_2 = 0$ è un sistema di equazioni, corrispondente

---

(*) Ciò è conseguenza di un teorema di Weierstrass già citato (pag. 339), almeno quando si faccia una conveniente trasformazione lineare di coordinate y_1, y_2.

a un punto di p, non posto su una di queste curve, i punti di K, in cui tale sistema è soddisfatto, sono certamente a distanza ***non infinitesima*** da A. Altrettanto si può ripetere per gli altri punti di indeterminazione (certamente in numero finito) comuni alle u_1, u_2.

In conclusione anche i punti di indeterminazione comuni alle u_1, u_2 definiscono soltanto un numero finito di curve singolari γ su p. Ed è ben evidente che queste curve singolari formano un insieme di punti, che non è denso in alcuna regione di p.

Se noi prendiamo in p un punto ***regolare***, cioè un punto ***non singolare***, e ***non posto su alcuna curva singolare***, la coppia di equazioni corrispondente avrà un numero ***finito*** di soluzioni, corrispondenti a punti di K, che non sono punti di indeterminazione nè per u_1, nè per u_2. Ora il piano p è il piano di due variabili ***complesse*** u_1, u_2: esso si può quindi rappresentare in uno spazio ***P di punti reali, a quattro dimensioni reali;*** i punti non regolari di p avranno in P per immagine dei punti isolati A in numero ***finito***, e delle moltiplicità Γ, pure in numero ***finito***, a due dimensioni ***reali***, immagine delle curve γ. I punti ***regolari*** di p avranno per immagine punti ***regolari*** di P: punti cioè non posti sulle Γ, e distinti dai punti A. Potremo quindi passare da ogni punto regolare di P a ogni altro punto regolare di P ***con una curva continua***, tutta formata di punti ***regolari*** di P; da un punto ***non regolare*** B di P potremo passare a ogni punto ***regolare*** di P con una curva continua, tutta formata di punti regolari, eccetto l'estremo B.

Vogliamo ora dimostrare un lemma fondamentale.

Se il sistema di equazioni $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$ è soddisfatto in r punti isolati $L_1, L_2, \ldots$ di K (*), ***che non sono di indeterminazione per alcuna***

(*) Questi punti possono essere in parte sovrapposti; e precisamente in un punto, che sia un infinitesimo di ordine λ per la coppia di funzioni $u_1 - a_1$, $u_2 - a_2$, si devono immaginare sovrapposti λ punti L. (Cfr. a pag. 343).

delle u_1, u_2, esiste un intorno α del punto (a_1, a_2) di P tale che, se (b_1, b_2) è un punto di (α), il sistema di equazioni $u_1 = b_1$, $u_2 = b_2$ è soddisfatto almeno in r punti isolati di K, che non sono punti di indeterminazione per le u_1, u_2.

Siano $L_1, L_2, \ldots, L_\rho$ ρ punti distinti, scelti tra i punti $L_1, L_2, \ldots, L_r$ e tali che ognuno dei punti L_i $(i \leq r)$ coincida con uno e uno solo dei punti L_j $(j \leq \rho)$. Sarà $\rho = r$, soltanto se tutti i punti L sono distinti, ossia se ogni punto L_i è uno zero semplice per la *coppia* di funzioni $u_1 - a_1$, $u_2 - a_2$. I punti L_j si possono supporre *tutti interni* a K: a questo caso ci possiamo infatti generalmente ridurre con un *cambiamento lecito* del campo K (*). Noi potremo costruire per L_j un intorno λ_j $(j = 1, 2, \ldots\ldots, \rho)$, interno a K, tale che λ_j non contenga alcun punto, ove u_1 od u_2 sono indeterminate o infinite, e che in nessun punto di λ_j distinto da L_j sia $u_1 - a_1 = u_2 - a_2 = 0$. L'integrale $I(\lambda_j, a_1, a_2)$ di Kronecker relativo ad $u_1 - a_1$, $u_2 - a_2$ ed all'intorno λ_j sarà uguale alla *moltiplicità* del corrispondente punto L_j per il sistema di equazioni $u_1 - a_1 = u_2 - a_2 = 0$.

(*) Unico caso eccezionale sarebbe quello, che uno dei punti L_j $(j \leq \rho)$, p. es. L_1, fosse lasciato fisso da una qualche trasformazione del nostro gruppo. Se L_1 giacesse sulla varietà limite della rete di campi K, allora per studiare gli zeri, e la moltiplicità degli zeri delle funzioni $u_1 - a_1$, $u_2 - a_2$ nel punto L_1, si dovrebbe riferirci all'intorno dell'origine nello spazio in cui sono coordinate non omogenee le corrispondenti variabili y, in modo analogo a quanto facemmo a pag. 310 e seg. per i gruppi fuchsiani e kleiniani. Se L_1 fosse interno alla rete di campi K, esso sarebbe lasciato fisso da un sottogruppo di ordine finito h. I punti di un intorno λ di L_1 si distribuirebbero in sistemi di h punti, tra loro equivalenti. Se è in uno di questi punti $u_1 = b_1$, $u_2 = b_2$, altrettanto avverrà negli $h - 1$ punti equivalenti. Il numero dei punti di λ, ove le u_1, u_2 assumono un sistema b_1, b_2 di valori, abbastanza poco differenti da a_1, a_2, è dunque un multiplo hk dell'intero h. Ma, poichè punti equivalenti rispetto a G non si considerano come distinti, dobbiamo dire che $u_1 = b_1$, $u_2 = b_2$ in soli k punti di un intorno di L_1. E converremo di dire che L_1 è un infinitesimo di moltiplicità k per $u_1 - a_1$, $u_2 - a_2$. Con questa convenzione, affatto analoga a quella fatta a pag. 306 per i gruppi su una sola variabile, la nostra dimostrazione continua a essere applicabile anche a un tale punto L_1.

Ora, l' integrale $I(\lambda, b_1, b_2)$ di Kronecker relativo a uno stesso di questi intorni, e alle due funzioni $u_1 - b_1$, $u_2 - b_2$ sarà naturalmente una funzione continua di b_1, b_2 nel punto $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$. Potremo perciò costruire un intorno α così piccolo del punto (a_1, a_2) in P, tale che per ogni punto (b_1, b_2) di α il citato integrale $I(\lambda, b_1, b_2)$ differisca da $I(\lambda, a_1, a_2)$ per meno di $\frac{1}{2}$. E poichè questo integrale deve essere sempre uguale a un numero intero, sarà $I(\lambda, b_1, b_2) = I(\lambda, a_1, a_2)$. Quindi il sistema di equazioni $u_1 - b_1 = = u_2 - b_2 = 0$ sarà in *ciascuno degli intorni considerati* soddisfatto tante volte, quante volte è soddisfatto il sistema di equazioni $u_1 - a_1 = u_2 - a_2 = 0$: ciò che dimostra il nostro asserto.

Ora, se (a_1, a_2) è un punto regolare di P, il sistema di equazioni $u_1 - a_1 = u_2 - a_2 = 0$ è, come sappiamo, soddisfatto soltanto in un numero finito $m(a_1, a_2)$ (che per ora non possiamo dire che sia differente da zero) di punti di K, in ciascuno dei quali poi le u_1, u_2 non sono indeterminate. Di più i punti regolari di P formano, come sappiamo, un tutto connesso: da uno si può passare a ogni altro lungo una linea l formata tutta di punti regolari. Quando un punto di P descrive l, allora, per quanto abbiamo detto, nessun punto di K, in cui sia soddisfatto il corrispondente sistema di equazioni $u_1 - a_1 = u_2 - a_2 = 0$, può avvicinarsi indefinitamente a un punto di indeterminazione per le u_1, u_2 o a un punto, ove una delle u diventa infinita. Noi potremo dunque escludere da K con intorni sufficientemente piccoli tutti questi punti, in modo che la coppia di equazioni corrispondente a un punto di l non sia soddisfatta in alcun punto della regione esclusa. Il numero $m(a_1, a_2)$ è dunque anche il numero dei punti della regione residua, in cui sono soddisfatte contemporaneamente le $u_1 - a_1 = u_2 - a_2 = 0$; quando si descrive l esso non puó mai diventare infinito, perchè l è una linea di punti regolari. Con un metodo analogo al precedente se ne deduce che $m(a_1, a_2)$ varia con continuità, quando ci si muove lungo l. E, poichè m è un intero, esso sarà dunque costante.

Se ne conclude che $m(a_1, a_2) = m(b_1, b_2)$ se (a_1, a_2) e (b_1, b_2) sono rispettivamente le coordinate degli estremi di l. E, poichè questi estremi sono, come vedemmo, punti regolari qualunque di P, ne deduciamo:

Esiste un intero m tale che ogni sistema di equazioni $u_1 - a_1 = u_2 - a_2 = 0$, ***corrispondente a un punto regolare di*** P, ***è soddisfatto in soli m punti isolati di un campo fondamentale*** K, ***nessuno dei quali è di indeterminazione per una delle u, mentre ogni altro sistema di equazioni*** $u_1 - a_1 = u_2 - a_2 = 0$, ***corrispondente a un punto non regolare di P, può essere soddisfatto al più in m punti isolati di K, in cui le*** u_i ***non sono indeterminate*** (oltre eventualmente a qualche altro punto, in cui una delle u sia indeterminata, oppure oltre a qualche linea di K).

Ciò si può anche enunciare rapidamente dicendo che la ***corrispondenza tra K e p è una corrispondenza*** $1 \mapsto m$.

Il teorema ora dimostrato vale, e si dimostra in modo affatto analogo anche per altri tipi di equazioni.

Sieno u_1, v_1, u_2, v_2 funzioni razionali di k. Se la coppia di equazioni $u_1 - a_1 v_1 = 0$, $u_2 - a_2 v_2 = 0$ è, almeno per un sistema di valori delle a_1, a_2, soddisfatta soltanto in un numero finito di punti isolati, allora esiste un intero m tale che per valori generici delle a_1, a_2 il precedente sistema di equazioni è soddisfatto in *soli* m punti isolati di K, nessuno dei quali è per le u_i, v_i un punto singolare (un polo, o un punto di indeterminazione); mentre per ogni altro sistema di valori delle a_1, a_2 il precedente sistema è soddisfatto in non più di m punti isolati di K, ove le u_i, v_i sono regolari, oltre eventualmente a qualche curva di K, o a qualche punto, in cui le u_i, v_i non sono regolari (*). Il teore-

(*) Questo teorema si dimostra in modo analogo al precedente. Si comincia ad osservare che i punti isolati di p, a cui corrisponde un sistema di equazioni, che ammette in K infinite soluzioni, sono in numero *finito*, perchè una curva di K lungo la quale è soddisfatto il nostro sistema di equazioni, deve coincidere con una delle curve, lungo cui $v_1 = 0$, oppure con una delle curve, lungo cui è $u_1 = 0$, oppure con una curva, che soddisfa

ma precedente è suscettibile di una ulteriore estensione. Siano $u_1, u_2, \ldots, u_r$ e $v_1, v_2, \ldots, v_s$ delle funzioni razionali di K; poniamo

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i + \alpha_{r+1}; \qquad R = \sum_{i=1}^{s} \beta_i v_i + \beta_{s+1}. \qquad (\alpha, \beta = \text{cost.}).$$

Esiste un intero m, tale che per valori generici delle costanti** α, β **il sistema di equazioni** $Q = 0$, $R = 0$ **è soddisfatto in soli m punti isolati di K, in ciascuno dei quali le** u_i, v_i **sono regolari (nè infinite, nè indeterminate), ***mentre per valori speciali delle** α, β **il precedente sistema di equazioni non è soddisfatto in più di m punti isolati di K, ove le** u_i, v_i **siano regolari*** (oltre eventualmente a qualche curva di K, o a qualche punto, ove almeno una delle u_i, v_i è singolare, ossia è infinita, o indeterminata).

In altre parole, se C è una curva analitica, lungo la quale sia $Q = 0$, *e se R si annulla in più di m punti di C, in cui le* u_i, v_i *sono regolari, allora R è nullo lungo tutta la curva C.*

---

all'equazione ottenuta annullando il Iacobiano delle $\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}$. Le quali curve sono in numero *finito*. Si dimostra poi, come nel caso precedente, che se il sistema delle nostre equazioni è per un punto (a_1, a_2) di p soddisfatto soltanto in h punti isolati di K, ove le u_i, v_i sono regolari, allora il sistema di equazioni corrispondente a un intorno del punto (a_1, a_2) di p è soddisfatto *almeno* in h punti isolati di K, in cui le u_i, v_i sono regolari. Per un sistema di valori delle a_1, a_2 scelto in modo qualunque, la nostra coppia di equazioni è soddisfatta in punti, ove è soddisfatto almeno uno dei seguenti sistemi di equazioni:

$$\frac{u_1}{v_1} - a_1 = \frac{u_2}{v_2} - a_2 = 0; \qquad u_1 = v_1 = \frac{u_2}{v_2} - a_2 = 0;$$

$$u_2 = v_2 = \frac{u_1}{v_1} - a_1 = 0; \qquad u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = 0.$$

Ai primi tre di questi sistemi possiamo applicare le dimostrazioni precedenti; l'ultimo sistema è soddisfatto per ipotesi soltanto in un numero finito di punti isolati. La legittimità di questo procedimento è dovuta a ciò che noi nell'enunciato del nostro teorema non ci occupiamo dei punti, in cui una delle u_i, v_i, p. es. una delle v_1, v_2 diventa infinita o indeterminata.

Che infatti per ogni sistema di valori delle $\alpha_i, \beta_j (i = 1, 2, ..., r)$ $(j = 1, 2, ..., s)$ esista un tale intero m indipendente dalle $\alpha_{r+1}, \beta_{s+1}$ segue dal primo teorema da noi dimostrato. Che poi tale intero sia indipendente dalle altre costanti α, β, p. es. dalle α_1, β_1, segue dal lemma, che ne abbiamo dedotto più sopra, appena si noti che le equazioni $Q = 0$, $R = 0$ si possono scrivere nella forma

$$z_1 - a_1 w_1 = 0 \qquad\qquad z_2 - a_2 w_2 = 0,$$

quando si ponga

$$z_1 = \sum_{i=2}^{r} \alpha_i u_i + \alpha_{r+1}, \qquad z_2 = \sum_{i=2}^{s} \beta_i v_i + \beta_{s+1},$$

$$a_1 = -\alpha_1, \ a_2 = -\beta_1, \ w_1 = u_1, \ w_2 = u_1.$$

Dal precedente teorema segue tosto un altro teorema perfettamente analogo per i sistemi di equazioni

$$P = 0 \qquad\qquad S_h = 0$$

quando con P, S_h si indichino rispettivamente un polinomio di primo grado nelle $u_1, u_2, \dots, u_r$ e un polinomio di h^{esimo} grado nelle stesse u_i. Infatti S_h è un polinomio di primo grado delle funzioni $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_r^{\alpha_r}$, ove sia $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r \leq h$. Il corrispondente intero m dipenderà soltanto da h: se μ è il valore di m per $h = 1$. allora, poichè tra i polinomii S_h esistono i polinomii, che sono prodotto di h polinomii generici di primo grado nelle u_i (tali che il corrispondente sistema di equazioni $P = S_h = 0$ sia soddisfatto in un numero *finito* di punti, tutti *regolari* per le u), sarà $m = \mu h$.

Siano ora u_1, u_2, u tre funzioni razionali di K: due almeno delle quali siano indipendenti.

Noi vogliamo dimostrare che esse sono legate da una relazione algebrica. Sia Σ uno spazio, in cui le u, u_1, u_2 sono coordinate cartesiane ortogonali. A ogni punto di K corrisponderà in Σ un punto di una certa varietà V a due dimensioni. Una equazione lineare nelle u rappresenterà in Σ un piano; una equazione $S_h = 0$, di grado h nelle u, rappresenterà in Σ una superficie

algebrica di ordine h. Per il teorema precedente, esisteranno in generale μh punti di K, a cui corrispondono in Σ punti della V, appartenenti alla $S_h = 0$, e a un piano prefissato. In particolare se α, β sono due piani generici in Σ, esiste in K un numero costante μ di punti, a cui in Σ corrispondono punti posti sulla V, e sulla retta di intersezione dei due piani α, β. Già da questi fatti si intuisce che la V sarà una superficie algebrica (di ordine μ, se a un punto generico di V corrisponde un solo punto di K). Ciò, che sarà confermato dalle deduzioni seguenti. Siano $P_1, P_2, \ldots, P_q$ q polinomii lineari generici nelle u, u_1, u_2, dove q è un intero per ora indeterminato. Se $Q = 0$ è un polinomio generico lineare nelle u, u_1, u_2, allora ognuno dei sistemi di equazioni $P_i = Q = 0$ sarà soddisfatto in μ punti isolati, in ciascuno dei quali le u, u_1, u_2 sono regolari; e i $q\mu$ punti così ottenuti si possono tutti supporre distinti. Ora un'equazione $P_i = 0$ determina in K un certo numero finito g_i di curve; e poichè l'insieme dei polinomii di primo grado nelle u, u_1, u_2 è un insieme continuo, mentre l'insieme degli interi g_i è numerabile, esisteranno infiniti polinomii di primo grado nelle u, u_1, u_2, per i quali l'intero g_i ha uno stesso valore. Per quanto sia grande q, potremo dunque scegliere i polinomii P in guisa che i numeri g_i restino inferiori a una stessa costante ν. Sia h un intero qualsiasi: scegliamo su ciascuna delle g_i curve definite dalla $P_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots q)$ $h\mu + 1$ punti, che non siano singolari per alcune delle u, u_1, u_2. Avremo così fissato complessivamente $(h\mu + 1) \sum_i g_i \leq \nu (h\mu + 1) q$ punti A in K. Ora un polinomio S_h di h^{esimo} grado nelle u, u_1, u_2 dipende da $\binom{h+3}{3} = \frac{(h+1)(h+2)(h+3)}{6}$ coefficienti. Poniamo $q = h + 1$. Se h è abbastanza grande, allora evidentemente $\binom{h+3}{3} > \nu (h\mu + 1) q$; e potremo così determinare i coefficienti di S_h in modo che sia $S_h = 0$ in tutti i punti A, precedentemente fissati in K. Quindi ognuna delle curve, per cui una delle P_i è nulla, ha almeno $h\mu + 1$ punti regolari comuni alla $S_h = 0$, e giace quindi intieramente in $S_h = 0$. I punti, ove $P_i = Q = 0$ giacciono dun-

que, qualunque sia i, sulla $S_h = 0$. La $S_h = 0$ ha quindi con $Q = 0$ almeno $(h+1)\mu$ punti comuni, e quindi le equazioni $S_h = 0$, $Q = 0$ sono soddisfatte lungo una stessa curva. Altrettanto avviene se a Q sostituiamo un polinomio Q', i cui coefficienti differiscano di abbastanza poco dai coefficienti omologhi di Q: e quindi la $S_h = 0$ è soddisfatta in ∞^2 punti di K, onde segue che S_h è in K identicamente nulla (*).

(*) Credo opportuno, per essere più completo, dare un cenno del modo con cui questa ultima parte della dimostrazione si estenda al caso di $n > 2$, tanto più che la bella dimostrazione del Blumenthal non è forse per $n > 2$ immune da qualche dubbio. Supponiamo p. es. $n = 3$. Al teorema sopra dimostrato per il sistema di equazioni $P = S_h = 0$ corrisponde, nel caso $n = 3$, un teorema perfettamente analogo per i sistemi di equazioni $P_1 = P_2 = S_h = 0$, quando le P_1, P_2 siano polinomii di primo grado ed S_h un polinomio di grado h di un certo numero r di funzioni razionali di K. Siano u_1, u_2, u_3, u quattro funzioni razionali di K, di cui le prime tre indipendenti. Consideriamo $q+1$ polinomii $P_1, P_2, \ldots, P_q$, Q *generici* di primo grado nelle u, essendo q un intero per ora indeterminato. Ognuno dei $\frac{q(q-1)}{2}$ sistemi di equazioni $P_i = P_j = Q = 0$ $(i \neq j)$ sarà verificato in μ punti di K, che noi potremo supporre essere tutti punti di regolarità per le u; e i $\mu \frac{q(q-1)}{2}$ punti così definiti si potranno supporre tutti distinti tra di loro. Poniamo $q = h(\mu+1)+1$. Come sopra, si vedrà che, se h è abbastanza grande, esiste un polinomio S_h di grado h nelle u, tale che sia $S_h = 0$ lungo tutte le curve, lungo cui è soddisfatto uno dei $\frac{q(q-1)}{2}$ sistemi di equazioni $P_i = P_j = 0$. Il polinomio S_h *non sarà divisibile* per almeno $q-h$ dei polinomii P, p. es. per $P_1, P_2, \ldots, P_{q-h}$. Ognuno dei sistemi di equazioni $P_i = P_j = S_h = 0$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, q)$ sarà soddisfatto almeno in uno dei punti ove $P_i = Q = P_j = 0$. Quindi il sistema di equazioni $P_i = Q = S_h = 0$ sarà soddisfatto in almeno $q - 1 = h(\mu+1) > h\mu$ punti regolari. Questo sistema di equazioni sarà dunque soddisfatto lungo *una curva* di K. Assumiamo in uno spazio euclideo Σ le u a coordinate cartesiane. Ai punti di K corrisponderà in Σ una ipersuperficie V. Gli iperpiani $P_i = 0$, $Q = 0$ e la ipersuperficie $S_h = 0$ avranno almeno una curva C_i comune con la varietà V. Siccome per $i = 1, 2, \ldots, q-h$, S_h non è divisibile per P_i, le curve $C_1, C_2, \ldots, C_{q-h}$ saranno curve algebriche. (Si noti che S_h non può contenere il piano $P_i = Q = 0$, perchè Q è *generico*). Sia ora Q_1 un altro

Le funzioni u_1, u_2, u sono dunque legate da una relazione algebrica.

Siano ora u_1, u_2 due qualsiasi funzioni razionali di K; e sia μ il numero dei punti isolati, regolari, in cui le u_1, u_2 assumono un sistema generico di valori a_1, a_2. Sia u un'altra funzione razionale di K, ed $S = 0$ l'equazione algebrica irriducibile, a cui soddisfano le u_1, u_2, u. Il grado h di S nella u non potrà essere maggiore di μ, poichè a un dato sistema generico di valori delle u_1, u_2 corrispondono non più di μ valori distinti per la u. Esistono anzi delle funzioni u razionali di K, per cui il grado della corrispondente equazione $S = 0$ nella u è proprio μ; col metodo del § 41 si dimostra infatti facilmente l'esistenza di una funzione u, razionale di K, che assume valori *distinti* nei μ punti di K, in cui le u_1, u_2 assumono rispettivamente dei valori a_1, a_2, scelti in modo generico. Ma anche prescindendo da ciò, dimostreremo che, se la u è scelta in modo che il grado del polinomio S nella u abbia il valore m più grande possibile ($m \leq \mu$), allora ***ogni altra funzione w razionale del campo K è esprimibile come funzione razionale delle u, u_1, u_2***. Infatti, se ρ è un qualsiasi parametro, la funzione $w_1 = u + \rho w$ soddisfa a una equazione $f(w_1, \rho, u_1, u_2) = 0$, algebrica nelle $u + \rho w, u_1, u_2$. Derivando rispetto a ρ otteniamo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{w_1 = u + \rho w} + w \left(\frac{\partial f}{\partial w_1}\right)_{w_1 = u + \rho w} = 0.$$

---

polinomio lineare generico delle u; l'iperpiano $Q_1 = 0$ di Σ avrà almeno un punto generico comune con ognuna delle curve $C_1, C_2, \ldots, C_{q-h}$. Esisteranno quindi in K almeno $q - h$ punti, ove $Q = Q_1 = S_h = 0$. Ora $q - h = h\mu + 1 > h\mu$. Quindi esisterà in K almeno una curva, ove sono nulli tanto S_h, quanto una coppia di polinomii lineari Q, Q_1, scelti in modo generico. O, ciò ch'è lo stesso, ogni piano a 2 dimensioni di Σ ha almeno una curva comune con la ipersuperficie V, e la $S_h = 0$. Ciò è soltanto possibile, se la V appartiene alla $S_h = 0$, ossia se S_h è identicamente nullo in K.

Ora per $\rho = 0$ è $\left(\frac{\partial f}{\partial w_1}\right)_{w_1 = u;\, \rho = 0} \neq 0$, perchè l'equazione tra le u, u_1, u_2, algebrica di grado m nella u, è irriducibile. Quindi si ha:

$$w = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{w_1 = u;\, \rho = 0}}{\left(\frac{\partial f}{\partial w_1}\right)_{w_1 = u;\, \rho = 0}}.$$

La quale formola dimostra il nostro teorema.

I teoremi di Weierstrass, enunciati al principio del paragrafo, sono così completamente dimostrati.

In particolare ne seguirà che *ogni funzione razionale di K è razionalmente esprimibile mediante serie θ.*

È poi ben evidente che, per i gruppi iperfuchsiani puri o misti, i quali posseggono un campo fondamentale senza vertici a distanza infinita nella metrica corrispondente, tanto le serie ξ, che le serie θ (di cui noi abbiamo già dimostrato la convergenza), e le loro derivate rappresentano funzioni analitiche senza singolarità essenziali a distanza finita. Cosicchè, se una funzione f delle x, invariante per G, è esprimibile razionalmente per mezzo di funzioni ξ, di funzioni θ e delle loro derivate, allora essa è una funzione razionale del campo e quindi è razionalmente esprimibile come funzione delle u, u_1, u_2.

§ 48. — Le funzioni zeta-automorfe e le equazioni differenziali corrispondenti.

Sia G un gruppo su n variabili x, per cui valgano i teoremi di Weierstrass. Sia Γ un gruppo isomorfo di trasformazioni lineari intere omogenee su m variabili. Le serie ξ di grado abbastanza alto, costruite per i gruppi G, Γ, siano convergenti assolutamente e uniformemente nell'intorno di un punto generico. Tutte queste ipotesi sono soddisfatte, come sappiamo, se per esempio G è fuchsiano, oppure un gruppo iperfuchsiano puro o misto, che possiede un campo fondamentale senza vertici a distanza infinita nella metrica corrispondente. Allo studio di

questi casi noi ci limiteremo quindi senz'altro. Indicheremo con $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ $n+1$ funzioni uniformi delle x, invarianti per G, senza singolarità essenziali a distanza finita, tali che ogni altra funzione siffatta sia funzione razionale delle z_i. Le z_i saranno legate da una relazione algebrica

$$\text{(I)} \qquad g(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) = 0.$$

Ogni funzione invariante per G, che si esprima razionalmente mediante serie ξ, serie θ, e derivate di serie ξ o θ, sarà una funzione razionale delle z_i.

Supponiamo di aver costruito m funzioni uniformi $y_1, y_2, \ldots, y_m$, le quali, quando le x subiscono una trasformazione di G, subiscono le trasformazioni di Γ. Noi potremo supporre le y_i linearmente indipendenti; se così non fosse, e p. es. le $y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \ldots, y_m$ fossero combinazioni lineari delle funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$, allo studio delle $y_1 \ldots y_m$ sostituiremmo lo studio delle $y_1 \ldots y_\mu$. Poichè le $z_1, \ldots, z_n$ sono invarianti per G, allora, considerando le y_i come funzioni delle $z_1, \ldots, z_n$, troviamo che le $\frac{\partial y_h}{\partial z_i}$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$ formano ancora per ogni valore di i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ un sistema di m funzioni, tali che, quando le x subiscono una trasformazione di G, subiscono la corrispondente trasformazione di Γ. Altrettanto avverrà quindi anche delle $\frac{\partial^2 y_1}{\partial z_i \partial z_h}, \frac{\partial^2 y_2}{\partial z_i \partial z_h}, \ldots, \frac{\partial^2 y_m}{\partial z_i \partial z_h}$ per ogni sistema di valori delle i, h compresi tra 1 ed n. *In generale le m funzioni V_i, definite dalle*

$$\text{(II)} \quad V_i = \Sigma_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \alpha_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n} y_i}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \ldots \partial z_n^{k_n}} \quad (k_1 + k_2 + \ldots + k_n \leq q)$$

subiscono, quando le x subiscono una trasformazione di G, la corrispondente trasformazione di Γ, se le α sono funzioni uniformi invarianti per il gruppo G, e q è un intero positivo arbitrario.

Ricordo che, conformemente a notazioni universalmente usate, si può porre

$$y_i = \frac{\partial^{0+0+0+\cdots+0} y_i}{\partial z_1^0 \partial z_2^0 \ldots \partial z_n^0}; \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_1} = \frac{\partial^{1+0+\cdots+0} y_i}{\partial z_1^1 \partial z_2^0 \ldots \partial z_n^0}, \text{ ecc.}$$

Se di più le y sono state costruite mediante serie ξ o θ, e se le x sono funzioni razionali delle $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$, le V_i non avranno singolarità essenziali a distanza finita.

Dimostriamo ora viceversa: *Se le $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sono*, come supponemmo, ***linearmente indipendenti, si può trovare un intero q così grande, che ogni sistema di funzioni V_i uniformi delle x, le quali subiscono, quando le x sono sottoposte a una trasformazione di G, la corrispondente trasformazione di Γ, sia sempre esprimibile sotto la forma (II), dove le α sono funzioni uniformi delle x, invarianti per G*** [o, in altre parole, ***sono funzioni uniformi delle $n-1$ variabili $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ legate dalla relazione (I)***].

Questi due teoremi ***riconducono*** (se Γ è un gruppo lineare intero) ***il problema (A) al problema più semplice (B)***, appena sia noto ***uno solo*** dei sistemi di funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Per dimostrarli, si osservi che se le y_i sono linearmente indipendenti, si possono trovare m sistemi di n numeri interi $k_{1s}, k_{2s}, \ldots, k_{ns}$ ($s = 1, 2, \ldots, m$) tali che sia differente da zero il determinante delle η_{rs} ($r, s = 1, 2, \ldots, m$), dove si è posto

$$\eta_{rs} = \frac{\partial^{k_{1s}+k_{2s}+\cdots+k_{ns}} y_r}{\partial z_1^{k_{1s}} \partial z_2^{k_{2s}} \ldots \partial z_n^{k_{ns}}} \quad (*).$$

(*) Questo teorema è evidentemente vero per $m = 1$: basterà dunque dimostrarlo per $m = t$, quando lo si ammetta vero per $m = t - 1$. Poichè le $y_1, \ldots, y_t$ sono linearmente indipendenti, altrettanto avverrà delle $y_1, y_2, \ldots, y_{t-1}$. E, poichè il nostro teorema si ammette vero per $m = t - 1$, esisteranno $t - 1$ sistemi di n numeri $h_{1s}, h_{2s}, \ldots, h_{ns}$ ($s = 1, 2, \ldots, t-1$) tale che sia differente da zero il determinante delle

$$\frac{\partial^{h_{1s}+h_{2s}+\cdots+h_{ns}} y_\rho}{\partial z_1^{h_{1s}} \partial z_2^{h_{2s}} \ldots \partial z_n^{h_{ns}}} \qquad (s, \rho = 1, 2, \ldots, t-1).$$

Ci basterà dimostrare che, se il determinante delle η_{rs} ($r, s = 1, 2, \ldots, t$) fosse nullo, comunque fossero scelti gli interi k, allora le y sarebbero linearmente dipendenti. Infatti in tal caso le infinite equazioni lineari (nelle $t-1$ incognite x_ρ)

$$R_{h_1 \ldots h_n} = \sum_{\rho=1}^{t-1} x_\rho \frac{\partial^{h_1+\cdots+h_n} y_\rho}{\partial z_1^{h_1} \ldots \partial z_n^{h_n}} - \frac{\partial^{h_1+h_2+\cdots+h_n} y_t}{\partial z_1^{h_1} \ldots \partial z_n^{h_n}} = 0,$$

Preso ora un sistema qualunque di funzioni V_ρ, soddisfacenti alle condizioni del precedente enunciato, scriviamo le

$$(\mathrm{II})' \qquad V_\rho = \sum_{\sigma=1}^{m} \beta_\sigma \, \eta_{\rho\sigma} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, m).$$

Otterremo così un sistema di m equazioni lineari indipendenti nelle m incognite $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Risolviamo queste equazioni rispetto alle β (ciò che è possibile in uno e in un solo modo, perchè per ipotesi il determinante $|\eta_{\rho\sigma}| \neq 0$). Noi otterremo le β_s scritte sotto forma di quoziente di due determinanti. I termini della σ^{esima} colonna ($\sigma = 1, 2, \ldots, m$) di ciascuno di questi due determinanti sono funzioni uniformi delle x, le quali, quando le x subiscono una trasformazione T di G, subiscono la corrispondente trasformazione lineare τ di Γ. Ciascuno di questi due determinanti resta dunque moltiplicato per uno stesso fattore costante (il determinante di τ), quando le x subiscono una trasformazione di G. *Il loro quoziente β_σ è dunque una funzione uniforme delle x, invariante per G.* Ed è ben chiaro quindi che,

---

che si ottengono dando alle h valori positivi o nulli qualunque, sarebbero *tutte* combinazioni lineari di quelle $t-1$ equazioni particolari, che si ottengono ponendo $h_i = h_{is}$ ($s = 1, 2, \ldots, t-1$). Queste $t-1$ equazioni nelle α hanno per ipotesi un determinante non nullo; e ne possiamo quindi trarre le α_ρ. Le α_ρ, così determinate, soddisferanno a tutte le equazioni $B = 0$. Ricordando questo fatto, e derivando la $B_{h_{1s}, h_{2s}, \ldots, h_{ns}} = 0$ rispetto a z_i, troveremo:

$$\sum_1^{t-1} \frac{\partial \alpha_\rho}{\partial z_i} \frac{\partial^{h_{1s}+h_{2s}+\cdots+h_{ns}} y_\rho}{\partial z_1^{h_{1s}} \partial z_2^{h_{2s}} \ldots \partial z_n^{h_{ns}}} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, t-1).$$

Queste $t-1$ equazioni lineari omogenee nelle $\frac{\partial \alpha_\rho}{\partial z_i}$ hanno un determinante non nullo; sarà quindi $\frac{\partial \alpha_\rho}{\partial z_i} = 0$, e quindi $\alpha_\rho =$ cost. Ma, per $h_i = 0$, la $B_{h_1, h_2, \ldots, h_n} = 0$ diventa $y_t = \sum_{\rho=1}^{t-1} \alpha_\rho y_\rho$ ($\alpha_\rho =$ cost.). E quindi le y non sarebbero linearmente indipendenti.

c. d. d.

se q è il più grande dei numeri $k_{1\sigma} + k_{2\sigma} + \ldots + k_{n\sigma}$, $(\sigma = 1, 2, \ldots, m)$, le (II)' non sono che un caso particolare delle (II), ove le α si suppongano funzioni uniformi delle x, invarianti per il gruppo G.

Supponiamo che le y_i non abbiano singolarità essenziali a distanza finita, che p. es. esse siano state costruite mediante serie ξ e θ.

Se anche le V_i sono state ottenute mediante serie ξ e θ, allora, per quanto dicemmo, *le β, e quindi anche le α si possono supporre razionali nelle $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$* e quindi algebriche nelle $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Le funzioni V definite dalle (II) si diranno funzioni zeta-automorfe *razionali* o *trascendenti* secondo che le α sono, o non sono contemporaneamente funzioni algebriche delle $z_1, \ldots, z_n$. Le serie ξ e θ conducono soltanto a funzioni zeta-automorfe *razionali.*

Studiamo ora un caso particolare. Sia

$$m = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+k-1}{k}$$

dove $\binom{n+h-1}{h} = \frac{n(n+1)\ldots(n+h-1)}{h}$ è il numero delle derivate di ordine h di una funzione di n variabili (numero delle combinazioni con ripetizione di n oggetti ad h ad h) e supponiamo che gli m sistemi di valori $k_{1\sigma}, k_{2\sigma}, \ldots, k_{n\sigma}$ siano precisamente tutti i sistemi di n interi non negativi $k_1, k_2, \ldots, k_n$ per cui $k_1 + k_2 + \ldots k_n \leq k$. Da quanto abbiamo detto risulta che ogni sistema di funzioni V_i uniformi delle x, le quali, quando le x subiscono le trasformazioni di G, subiscono le trasformazioni di Γ, è dato da:

$$V_i = \sum_{k_1 \ldots k_n} \alpha_{k_1 k_2 \ldots k_n} \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} y_i}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \ldots \partial z_n^{k_n}},$$

dove le α sono funzioni invarianti per G, e gli interi k percorrono tutti i sistemi di valori, per cui $k_1 + \ldots + k_n \leq k$. Se in particolare poniamo $V_i = \frac{\partial^{k+1} y_i}{\partial z_1^{s_1} \partial z_2^{s_2} \ldots \partial z_n^{s_n}}$, dove le s sono in-

teri non negativi qualunque la cui somma è uguale a $k+1$, e se indichiamo con $\alpha^{(s_1 \dots s_n)}$ le funzioni α corrispondenti, troviamo infine:

Si possono trovare delle funzioni $\alpha^{(s_1 s_2 \dots s_n)}_{k_1 k_2 \dots k_n}$ $(s_1 + \dots + s_n = k+1;$ $k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq k)$ ***uniformi delle** x, **invarianti per** G, **tali che le equazioni:***

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial^{k+1} y}{\partial z_1^{s_1}\,\partial z_2^{s_2} \dots \partial z_n^{s_n}} = \sum_{k_1 \dots k_n} \alpha^{(s_1 s_2 \dots s_n)}_{k_1 k_2 \dots k_n} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} y}{\partial z_1^{k_1}\,\partial z_2^{k_2} \dots \partial z_n^{k_n}}$$

(dove la sommatoria del secondo membro è estesa a tutti quei sistemi di valori non negativi delle k, per cui $k_1 + \dots + k_n \leq k$) ***valgono per** $y = y_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, **e per tutti i sistemi di valori delle** $s_1, s_2, \dots, s_n$, **tali che** $s_1 + s_2 + \dots + s_n = k+1$.*

Se le funzioni** y_i **sono state ottenute mediante serie** ξ **e** θ, **le** α **sono funzioni razionali di** $z_1 \dots z_{n-1}$ **e quindi funzioni algebriche di** $z_1 \dots z_n$. **Le** y **sono dunque in tal caso un sistema di integrali del sistema di equazioni (III) ***lineari alle derivate parziali a coefficienti algebrici***, che esprimono le $(k+1)^{\text{esime}}$ derivate della funzione incognita y in funzione lineare della y stessa e delle sue derivate prime, seconde, ... k^{esime}. L'integrale più generale del sistema (III) non può dunque contenere più di $1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n+k-1}{k} = m$ costanti arbitrarie.

Dunque: ***L'integrale più generale del sistema*** (III) ***è***

$$y = \sum_{i=1}^{m} c_i\, y_i \qquad (c_i = \text{cost.}).$$

Il sistema (III) ***di equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti algebrici gode dunque della seguente proprietà:***

Teorema I. — ***Tanto le variabili** $z_1, z_2, \dots, z_n$, **quanto ogni integrale** y **delle*** (III) ***sono funzioni uniformi di** n **variabili** $x_1, x_2, \dots, x_n$; **e precisamente sono funzioni automorfe e zeta-automorfe, di cui noi conosciamo la natura analitica e che quindi possiamo***

In altre parole, mentre *il problema dell'integrazione del sistema* (III) *richiede lo studio di una funzione y polidroma delle variabili* $z_1, z_2, \ldots, z_n$; *la teoria delle funzioni automorfe riconduce questa determinazione alla teoria di funzioni uniformi già note, e quindi in sostanza dà un mezzo per integrare le* (III).

Essa ci insegna infatti che si possono trovare n variabili ausiliarie $x_1 \ldots . x_n$, di cui tanto le z che le y sono funzioni uniformi (automorfe e zeta-automorfe).

Un fatto analogo si presenta per l'equazione algebrica, già citata

$$\text{(I)} \qquad g(z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}) = 0.$$

Teorema II. — *La* z_{n+1}, *considerata come funzione delle* $z_1, \ldots, z_n$, *determinata da* (I) *è una funzione non uniforme.* La nostra teoria ci dà un mezzo *per risolvere l'equazione algebrica* (I) *per mezzo di trascendenti uniformi ben note* (automorfe), *in quanto che ci insegna l'esistenza di n variabili* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *tali che le z più generali soddisfacenti alla* (I) *si ottengono, ponendo le z uguali a certe funzioni uniformi note* (automorfe) *delle x.*

Questo è un fatto simile a quanto avviene per le curve algebriche $f(x, y) = 0$ di genere 0 o 1. La teoria delle funzioni algebriche ci dice che nel primo caso le x, y sono funzioni razionali di un conveniente parametro t, e che nel secondo caso le x, y sono funzioni uniformi (ellittiche) dell'integrale abeliano di prima specie, relativo alla curva $f(x, y) = 0$. (Cfr. § 45, pag. 321).

Sia

$$x'_i = \frac{\sum_h a_{ih} x_h + a_i}{\sum_h b_h x_h + b} \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, n) \; (a, b = \text{cost.})$$

una trasformazione generica T di G. Moltiplicando le a, b per una stessa costante (ciò che non muta la T) possiamo far sì che il Iacobiano della T sia uguale (§ 40, pag. 283) a

$$\left(\frac{1}{\sum_h b_h x_h + b}\right)^{n+1}.$$

Consideriamo ora le solite n funzioni uniformi indipendenti $z_1, z_2, \ldots, z_n$ invarianti per G; e ne sia $L = \frac{d(z_1 z_2 \ldots . z_n)}{d(x_1 \ldots . x_n)}$ il Iacobiano rispetto alle x. Se noi alle x facciamo subire la trasformazione T di G, L si trasforma in

$$L' = \frac{d(z_1 \ldots . z_n)}{d(x'_1 \ldots . x'_n)} = L \frac{1}{\frac{d(x'_1 \ldots . x'_n)}{d(x_1 \ldots . x_n)}} = L \left(\sum_h b_h x_h + b\right)^{n+1}.$$

Le $n + 1$ funzioni

$$Y_0 = \sqrt[n+1]{L}, \qquad Y_i = x_i \sqrt[n+1]{L} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sono chiaramente linearmente indipendenti, perchè da una relazione $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i Y_i = 0$ ($\lambda_i = \text{cost.}$), si trae

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0,$$

e quindi (poichè le x sono variabili indipendenti)

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots . = \lambda_n = 0.$$

Ora, quando le x subiscono la trasformazione T di G, le Y_i subiscono la trasformazione

$$Y'_0 = \varepsilon \,(b\, Y_0 + \sum_{h=1}^{n} b_h\, Y_h),$$
$$Y'_i = \varepsilon \,(a_i\, Y_0 + \sum_{h=1}^{n} a_{ih}\, Y_h), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dove con ε ho indicato una radice $(n + 1)^{\text{esima}}$ dell'unità.

Questa trasformazione non è che la T scritta sotto forma omogenea, e genera, al variare di T, un gruppo Γ di trasformazioni lineari intere omogenee. Notiamo che le Y possono anche non essere uniformi: in quanto che, dalla definizione, che ne abbiamo data, risulta soltanto che esse sono determinate a meno di un fattore, radice $(n + 1)^{\text{esima}}$ dell'unità. Ora $n + 1 = 1 + \binom{n}{1}$; e noi possiamo applicare le precedenti considerazioni, ove si

faccia $k = 1$ (*). Si vede facilmente che la eventuale polidromia delle Y, cui abbiamo testè accennato, non infirma i risultati da noi ottenuti: e si trova così che le Y soddisfano a un sistema di equazioni

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial z_r \, \partial z_s} = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h^{(rs)} \frac{\partial Y}{\partial z_h} + \alpha^{(rs)} Y \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

dove le $\alpha_h^{(rs)}$ sono funzioni algebriche delle $z_1 \ldots . z_n$. Il sistema (IV) non è che un caso particolare del sistema (III); e per esso potremmo sostanzialmente ripetere le osservazioni fatte più sopra: il fatto nuovo, che si presenta, è questo che le variabili x, delle quali tanto le z che l'integrale generale $Y = \sum_0^n c_i Y_i$ ($c_i =$ cost.) sono funzioni uniformi, o a un numero finito di valori (uno dei quali si deduce da un altro, moltiplicando questo per una radice $(n+1)^{\text{esima}}$ dell'unità) non sono che i quozienti di n integrali indipendenti $Y_1, \ldots, Y_n$ a un $(n+1)^{\text{esimo}}$ Y_0, da quelli pure linearmente indipendente.

Teorema III. — *Le variabili $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sono dunque funzioni automorfe dei rapporti di $n+1$ integrali linearmente indipendenti del sistema delle* (IV).

Resta così dimostrato come esista un'intima connessione tra la teoria delle funzioni automorfe e zeta-automorfe e la teoria di certi sistemi (III) e (IV) di equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti algebrici.

Noi siamo giunti anche a un ulteriore risultato.

Se $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sono m funzioni linearmente indipendenti delle x, le quali subiscono, quando le x sono trasformate con una trasformazione di S, la corrispondente trasformazione di Γ, noi abbiamo nelle (II) un sistema di equazioni, che permette di trovare il più generale sistema di funzioni Y cogredienti alle y, e di risolvere quindi nel modo più generale per i nostri gruppi il problema fondamentale (A).

(*) Il calcolo effettivo dimostra nel modo più semplice, che il determinante f delle Y_{ih} ($i, h = 0, 1, \ldots n$) [dove si è posto $Y_{i0} = Y_i$, $Y_{ih} = \frac{\partial Y_i}{\partial x_h}$ per $h > 0$] è uguale a L, ed è quindi differente da zero.

CAPITOLO DODICESIMO. — **Applicazioni alle funzioni polidrome.**

§ 49. — Il problema fondamentale.

Sia W una funzione polidroma di n variabili $z_1, z_2, \ldots, z_n$. È possibile determinare n variabili ausiliarie $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ed un gruppo G pr. dis. su di esse, in modo che le z riescano funzioni uniformi AUTOMORFE *razionali delle x in un campo fondamentale di G, e la W riesca una funzione uniforme delle x?*

Per i risultati del § 48 (pag. 366) al precedente enunciato si potrebbe dare un'altra forma, osservando che la ricerca delle variabili x equivale perfettamente alla ricerca del corrispondente sistema (IV) di equazioni differenziali lineari a coefficienti algebrici nelle z.

Questo problema è il cosidetto *problema della uniformizzazione delle funzioni polidrome.* Cercheremo dapprima di giustificarlo con qualche considerazione intuitiva, restando nel caso più semplice di $n = 1$. E supponiamo che z sia una funzione fuchsiana o kleiniana della x, invariante per un certo gruppo G pr. dis. La x, considerata come funzione di z, sarà una funzione polidroma a un numero finito, o infinito di valori, secondo che G contiene un numero finito, o infinito di trasformazioni. Se quei giri sul piano della z, che lasciano invariata la x, lasciano invariata anche W, allora la W sarà una funzione uniforme della x. La nostra questione è appunto quella di costruire, per ogni data funzione W, una variabile x, e un gruppo G in modo da soddisfare alla condizione enunciata.

Questo problema è uno dei più importanti, che offra l'analisi moderna. È facile infatti riconoscere la grande utilità, che la risoluzione di esso avrebbe in svariate questioni d'analisi. Esso servirebbe sopratutto a riportare lo studio della funzione polidroma W allo studio di funzioni uniformi. Se per esempio W fosse una funzione algebrica delle z, e G fosse il gruppo

di trasformazioni sulle x, che lasciano invariante la W, allora W sarebbe invariante per un sottogruppo G' di indice finito del gruppo G: le $W, z_1, z_2, \ldots, z_n$ sarebbero funzioni automorfe razionali delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si sarebbe così dimostrato che le coordinate $W, z_1, z_2, \ldots, z_n$ della più generale ipersuperficie algebrica si possono esprimere come funzioni uniformi automorfe razionali di n variabili ausiliarie x, ossia mediante serie θ. E sarebbe perciò risoluto il problema di risolvere la più generale equazione algebrica in $n + 1$ variabili mediante trascendenti uniformi, completamente conosciute. Si sarebbero in sostanza estese a equazioni algebriche qualsiasi i risultati ottenuti al § 48 per la equazione (I) (pag. 364). — Similmente, se W fosse un integrale generico di un sistema Σ di equazioni lineari alle derivate parziali, il cui integrale generale dipende da un numero finito m di costanti arbitrarie, e i cui coefficienti sono funzioni algebriche delle z, e se $W_1, W_2, \ldots, W_m$ sono un sistema di integrali indipendenti di Σ, W sarebbe una combinazione lineare delle W_i. Queste, considerate come funzioni delle x, sarebbero evidentemente funzioni, le quali subiscono soltanto trasformazioni lineari, quando le x subiscono una trasformazione di G. Dunque le W sarebbero funzioni zeta-automorfe, razionali o trascendenti, delle x (§ 48, pag. 362). Sarebbero così estesi a sistemi Σ generali le proprietà, trovate al § 48 per i sistemi (III) (pag. 363); i più generali sistemi Σ si potrebbero considerare integrati (almeno nel senso moderno di tale parola) in quanto che la ricerca dei loro integrali sarebbe ridotta alla ricerca di speciali funzioni uniformi, e in molti casi sarebbe anzi esaurita mediante le trascendenti ξ e θ, che noi dobbiamo considerare come funzioni completamente note.

Possiamo approfondire meglio con un esempio queste proposizioni nel caso che sia $n = 1$. Supponiamo cioè di avere una equazione differenziale

$$y^{(k)} + p_1(z)\, y^{(k-1)} + \ldots + p_k(z)\, y = 0$$

dove le p_i sono p. es. funzioni razionali di una variabile z. È ben noto che i punti singolari (*) di un integrale y della nostra equazione non possono essere distinti dai punti, ove una delle p_i diventa infinita. Siano $z = a_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ i punti singolari delle p_i: e supponiamo di aver trovato una variabile ausiliaria x, tale che:

1. La z sia una funzione fuchsiana della x, esistente soltanto entro il solito cerchio limite C.

2. Se G è il gruppo fuchsiano, che trasforma in sè stessa la funzione $z(x)$, un suo campo fondamentale K possegga r cicli di vertici non accidentali, tutti posti su C, e in cui la funzione $z(x)$ assume rispettivamente i valori $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Allora evidentemente un integrale y della nostra equazione differenziale, pensato come funzione della x, è una funzione ***uniforme e regolare della** x* entro C; ed esso si potrà calcolare entro C, ossia per un qualsiasi valore della z, mediante uno sviluppo in serie di Taylor, ordinato secondo le potenze positive della x, e valido in tutto il campo, che si deve considerare. Lo studio degli integrali della nostra equazione differenziale è così ricondotto allo studio di una funzione della variabile ausiliaria x uniforme e senza singolarità in tutto il campo, che si deve studiare; e questa funzione si potrà anzi in molti casi esprimere anche mediante serie ξ e θ di Poincaré.

Purtroppo però il precedente problema è stato studiato nel solo caso di $n = 1$; e a questo noi ci limiteremo di qui in poi.

(*) Punti singolari di una funzione $y(z)$ sono i punti $z = \alpha$, in un intorno dei quali la funzione non è sviluppabile in serie di Taylor-Cauchy, ossia in serie ordinata secondo le potenze positive di $(z - \alpha)$. Ed è ben noto dai primi teoremi sulle equazioni differenziali lineari (cfr. per es. SCHLESINGER, *Handbuch der linearen Differentialgleichungen*. Tomo I, pag. 21) che un integrale qualsiasi della nostra equazione differenziale è sviluppabile in serie di Taylor-Cauchy nell'intorno di un punto, ove le p_i sono regolari.

Vedremo che per $n = 1$ si può sempre in infiniti modi trovare la variabile x_1 ausiliaria. Per rendere il problema determinato si possono prefissare *a priori* proprietà, di cui deve godere la funzione uniforme automorfa z_1 della x_1. Noi vedremo p. es. che si può imporre la condizione che il gruppo delle trasformazioni lineari, che lasciano invariata la $z_1(x_1)$, sia o un gruppo discontinuo finito; o un gruppo di movimenti euclidei, o un gruppo fuchsiano: in una parola che tale gruppo sia un gruppo di movimenti in un piano a curvatura costante, ellittico, euclideo, o iperbolico. Vedremo però che neanche queste nuove condizioni bastano a rendere il nostro problema suscettibile di non più che una risoluzione.

Cominceremo col supporre che la funzione W della z (sopprimo gli indici, perchè inutili, essendo $n = 1$) abbia un numero finito di punti di diramazione $z = a_1$, $z = a_2$, ..., $z = a_\tau$. La W ritornerà al primitivo valore, se la z compie un giro attorno a un punto distinto dai punti $a_1, a_2, \ldots, a_\tau$: essa non ritorna allo stesso valore, se la z compie un giro attorno a uno dei punti a.

Sia k_h il più piccolo intero, tale che la W ritorni al valore iniziale, quando la z compie k_h giri attorno al punto a_h. Se la W non ritorna mai al valore iniziale, per quanti giri la z compia attorno al punto a_h, porremo $k_h = \infty$. Indicheremo con $z = a_{\tau+1}$, $z = a_{\tau+2}$, ..., $z = a_{\tau+\nu}$ altri ν punti arbitrarii ($\nu \geqq 0$) del piano complesso della z; e sceglieremo degli interi positivi λ_i ($i = 1, 2, \ldots, \tau + \nu$) finiti o infiniti, tali che sia

$$\lambda_h = \infty \qquad \text{oppure} \qquad \lambda_h = \nu_h\, k_h \text{ per } h = 1, 2, \ldots, \tau \text{ (*)},$$

dove ν_h sono interi positivi. Supponiamo per un momento che la z sia funzione di una variabile x, invariante per un gruppo fuchsiano G di genere zero, ed esistente all'interno del cerchio limite C, tale che:

(*) Se $\tau = 2$, è chiaramente $k_1 = k_2$; noi supporremo anche $\nu_1 = \nu_2$.

1. *Se K è un poligono fondamentale per G, la funzione z assume ciascuno dei valori a_i $(i = 1, 2, \ldots, \tau + \nu)$ in uno e un solo ciclo di vertici non accidentali di K; viceversa in ogni vertice non accidentale di K la z assuma uno dei valori a_i.*

2. *Un vertice, in cui la z assume il valore a_i, sia lasciato fisso da un sottogruppo ciclico di G di ordine λ_i.*

(Se $\lambda_i = \infty$, questo vertice dovrà giacere sul cerchio limite C).

In tal caso la W, considerata come funzione della x, esisterà entro il cerchio C, e vi sarà una funzione uniforme della x. Infatti un giro chiuso della x attorno a un punto qualunque A interno al cerchio C equivale a un giro chiuso della z attorno a un punto del suo piano, distinto dai punti a, se A non è lasciato fisso da alcuna trasformazione di G, oppure equivale a λ_h giri della z attorno al punto $z = a_h$, se A è un punto equivalente a un vertice di K, immagine del punto $z = a_h$. Un giro chiuso della x attorno a un qualsiasi punto *interno* a C lascia perciò invariata la funzione W; e quindi la W è monodroma entro C. A un risultato perfettamente analogo giungiamo, se G è un gruppo di movimenti in una metrica ellittica (e se la z esiste per tutti i valori della x), oppure se G è un gruppo di movimenti euclidei (e la z esiste per tutti i valori della x, eccetto che per $x = \infty$) e possiede un campo fondamentale, che gode delle due proprietà enunciate più sopra. Quindi in questo caso il problema da noi posto più sopra è senz'altro risoluto. Appunto perciò per risolvere il nostro problema noi possiamo limitarci a dimostrare il seguente importantissimo teorema.

Se sono dati i punti $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ $(\rho = \tau + \nu)$, e i numeri interi positivi, finiti o infiniti, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$, esiste una variabile x, definita a meno di una trasformazione lineare, tale che la z risulti invariante per le trasformazioni di un gruppo G di trasformazioni lineari sulla variabile x, il quale sia sul piano della variabile x un gruppo di movimenti in una metrica o ellittica, o iperbolica, o euclidea, e sia tale che un campo fondamentale K di G goda delle due proprietà enunciate più sopra.

Questo teorema, che noi dimostreremo seguendo sostanzialmente un metodo dovuto a Poincaré, e completato da Koebe, è stato affrontato anche per altre vie. L'una dovuta a Klein e Poincaré non è ancora completa nel caso generale. Essa si riduce, nella intima essenza, a un computo di costanti e ha preso il nome di *metodo di continuità*. Il Fricke l'ha resa rigorosa in molti casi particolari. Un'altra via, indicata da Schwarz, e approfondita da Poincaré e Picard in molte memorie del *Journal de Mathématiques* dal 1890 al 1898, riconduce il nostro studio a certi teoremi di esistenza per l'equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u$, ed è ancora di una grande complicazione. Un'altra via infine è stata seguita in casi particolari dallo Schlesinger, che determinò la variabile x come limite di una funzione algebrica della z.

Un altro modo di risolvere il nostro problema fondamentale, imponendo altre condizioni al gruppo G, è stato pure studiato dal Koebe nelle *Göttinger Nachrichten* (1907) (*) e negli *Jahresberichte der d. M. Vereinigung* (1907) con metodi analoghi ai seguenti. Il Koebe in questi lavori si riferisce a gruppi, che posseggono una sola rete di campi fondamentali.

§ 50. — Trasformazione del problema.

Il gruppo G deve essere, per quanto abbiamo detto al § 49, un gruppo di movimenti in una metrica a curvatura costante. Noi vogliamo vedere come si possa riconoscere *a priori* se questa metrica è ellittica, euclidea, o iperbolica.

Sia K un campo fondamentale normale del nostro gruppo: se noi consideriamo come identici punti del contorno di K, equivalenti rispetto a G, i punti di K saranno in corrispondenza biunivoca coi punti del piano p della variabile z. I cicli di vertici non accidentali corrispondono ai ρ punti $a_1 \ldots . a_\rho$: essi sono quindi in numero di ρ, e la somma degli angoli di K nello i^{esimo} ($i = 1, 2, \ldots\ldots \rho$) di questi cicli è uguale a $\frac{2\pi}{\lambda_i}$.

(*) *Zur Uniformisierung der algebraischen Kurven.* Götlinger Nachrichten, 1907, Heft. 4.

Vi sarà poi un certo numero σ di cicli di vertici accidentali; la somma degli angoli di K in uno di questi cicli è 2π. Quindi la somma S di tutti gli angoli di K è uguale a $2\pi\left(\sigma+\sum_1^\rho{}_i\frac{1}{\lambda_i}\right)$. Sia $2h$ il numero dei lati di K. A ognuna delle h coppie di lati equivalenti di K corrisponderà in p una unica linea l_i $(i = 1, 2, \ldots, h)$. A ognuno dei $\rho+\sigma$ cicli di vertici di K corrisponde in p un punto B, estremo di una o più delle linee l_i, e viceversa. Se noi tagliamo p lungo le linee l_i, il piano p sarà l'immagine di K, quando si considerino come distinti punti equivalenti del contorno di K. Il piano p, tagliato lungo le h linee l_i, i cui estremi sono i $\rho+\sigma$ punti B, sarà dunque semplicemente connesso, e un punto mobile potrà descrivere con continuità, e senza salti, l'insieme delle linee l_i (immagine del contorno di K). Sarà quindi $\rho+\sigma=h+1$, come si vede facilmente col metodo di induzione completa. Chiameremo *eccesso angolare* di K la differenza

$$S-2\pi\,(h-1)=2\pi\,(\sigma+\sum_1^\rho{}_i\frac{1}{\lambda_i}-\rho-\sigma+2)=2\pi\left(\sum_1^\rho{}_i\frac{1}{\lambda_i}-\rho+2\right).$$

Esso sarà positivo, nullo, o negativo contemporaneamente a $2+\sum_1^\rho{}_i\left(\frac{1}{\lambda_i}-1\right)$. Ora è ben noto dai teoremi della geometria elementare sulla somma degli angoli di un poligono geodetico del piano ellittico, iperbolico, ed euclideo (cfr. § 35, pag. 241 e 245) che tale differenza è nei tre casi rispettivamente positiva, negativa o nulla. Dunque il gruppo G, che noi vogliamo costruire, sarà un gruppo di movimenti

nel piano *euclideo* se $\quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\rho}\left(1-\frac{1}{\lambda_i}\right)=1,$

nel piano *ellittico* se $\quad \frac{1}{2}\sum\left(1-\frac{1}{\lambda_i}\right)<1,$

nel piano *iperbolico* se $\quad \frac{1}{2}\sum\left(1-\frac{1}{\lambda_i}\right)>1.$

E, se noi ricordiamo i teoremi dei §§ 34 e 35 troviamo che nei tre casi esiste appunto almeno un gruppo Γ di movimenti in un piano α euclideo, ellittico, o iperbolico, un cui campo fondamentale H ha ρ cicli di vertici non accidentali,

tali che la somma degli angoli del campo nello i^{esimo} ($i = 1, 2, \ldots, \rho$) di questi cicli sia uguale a $\frac{2\pi}{\lambda_i}$. Pieghiamo H in guisa che punti corrispondenti del suo contorno vengano a coincidere: otterremo una superficie chiusa S di genere zero, che potremo porre in corrispondenza ***biunivoca e continua*** coi punti del piano p, in guisa che ai cicli di vertici non accidentali di H corrispondano rispettivamente i punti $z = a_1, z = a_2, \ldots, z = a_\rho$. A ogni coppia di lati equivalenti di H verrà così a corrispondere una linea in p; tagliando p lungo queste linee, otterremo un piano p', che sarà in corrispondenza ***biunivoca continua*** col poligono H, e sarà quindi semplicemente connesso. Sul piano p' così tagliato la W sarà monodroma. La rete dei campi fondamentali di Γ sia formata di $h + 1$ poligoni $H, H_1, H_2, \ldots, H_h$ (sarà $h = \infty$, se Γ non è un gruppo di movimenti ellittici). Consideriamo altri h piani $p'_1, p'_2, \ldots, p'_h$, identici a p', e che noi potremo porre in corrispondenza biunivoca continua rispettivamente con $H_1, H_2, \ldots, H_h$, in modo analogo a quello seguito per il piano p e il poligono H. Osserviamo che i poligoni H_i formano un' unica rete, che due poligoni adiacenti hanno un lato comune, e che da un poligono si può passare a ogni altro, attraversando un numero finito di poligoni a 2 a 2 adiacenti. Se H_i, H_j sono due poligoni aventi un lato comune, noi congiungeremo i due piani corrispondenti p'_i, p'_j, saldandoli lungo quel pezzo dei loro contorni, che è immagine di questo lato comune. Otteniamo così una superficie Riemanniana F di $h + 1$ fogli. Ed evidentemente la W sarà una funzione uniforme su F. I punti di F saranno in corrispondenza biunivoca continua coi punti della rete di poligoni H.

Caso I. — Γ è un gruppo di movimenti ellittici; in tal caso la superficie F è a un numero *finito* di fogli.

Caso II. — Γ è un gruppo di movimenti euclidei o iperbolici; in tal caso F ha infiniti fogli corrispondenti agli infiniti poligoni H, che ricoprono un piano α euclideo o iperbolico.

Diremo *regolari* quei punti della F, in cui non si diramano

infiniti fogli della F, e quei pezzi F' della F, tali che in un punto interno a F', o posto sul contorno di F' non si diramino infiniti fogli della F. In α descriveremo dei cerchi concentrici di raggio indefinitamente crescente. A essi corrisponderanno in F dei cammini chiusi $C_1, C_2, \ldots$ tali che la regione interna a C_i è pure interna a C_{i+j} $(j > 0)$. Poichè poi in nessun vertice a distanza finita della rete di poligoni H concorrono infiniti poligoni della rete stessa, i punti di diramazione della superficie F, interni a una delle linee C_i, sono tutti di ordine finito e sono punti regolari per F. Viceversa ogni punto regolare di F è interno a uno almeno dei cammini C_i, e quindi anche ai cammini successivi.

Supponiamo ora di aver risoluto il problema propostoci, e di aver trovato la variabile ausiliare x cercata. La z sarà invariante per un certo gruppo G di trasformazioni lineari sulla x, e ogni foglio di F sarà in corrispondenza biunivoca coi punti di un campo fondamentale di G. Ma, poichè z è per ipotesi funzione analitica di x, questa corrispondenza sarà *conforme*. Avremo così una rappresentazione biunivoca e conforme di F sulla rete dei campi fondamentali di G.

Questa rete riempirà tutto il piano complesso (se G è un gruppo di movimenti del piano ellittico), oppure tutto il piano complesso, eccettuato il punto $x = \infty$ (se G è un gruppo di movimenti euclidei), oppure riempirà tutta l'area interna a un certo cerchio (se G è un gruppo fuchsiano).

Viceversa esista una rappresentazione conforme biunivoca tra i punti di F, e i punti di una regione R del piano complesso di una variabile x; la R sia formata di tutti i punti di questo piano, oppure di tutti i punti di questo piano eccettuato il punto $x = \infty$, oppure dei punti di questo piano, che sono interni a un certo cerchio. *Se ξ è un'altra variabile, che gode di questa proprietà, ξ sarà una funzione lineare della x.* Ciò è ben evidente, se R è formato di *tutti* i punti del piano della x: le rappresentazioni biunivoche conformi di tutto un piano complesso su un altro piano complesso sono definite, ponendo la variabile di

un piano uguale a una funzione lineare della variabile dell'altro piano. Ciò si dimostra in modo analogo, se R è formato di tutti i punti del piano della x, eccettuato il punto $x = \infty$. Più delicata invece è la dimostrazione se R è la regione interna a un cerchio del piano della variabile x. Sia R' la regione circolare corrispondente del piano della variabile ξ. Noi potremo supporre, senza diminuire la generalità, che R ed R' siano cerchi di raggio uguale a uno, col centro nell'origine dei rispettivi piani, e che per $x = 1$, sia $\xi = 1$. A questo caso ci possiamo infatti ridurre, operando convenienti trasformazioni lineari sulle x, ξ. Io dico che nelle nostre ipotesi è proprio $x = \xi$. Notiamo che tra R ed R' esiste una rappresentazione conforme biunivoca; e il nostro teorema sarebbe evidente, se noi sapessimo che questa rappresentazione è regolare anche sul contorno di R, R'. Siccome però questo non è noto *a priori*, ricorreremo a un artificio, dovuto a Poincaré. Sia R_1 un cerchio concentrico a R di raggio $r < 1$; la funzione $\log \operatorname{mod} \frac{\xi}{x}$ è armonica e regolare in R_1; essa, sul contorno, e quindi anche all'interno di R_1, è minore di $\log \operatorname{mod} \frac{1}{r}$. Passando al limite per $r = 1$, $R_1 = R$, troviamo che nei punti interni a R la funzione $\log \operatorname{mod} \frac{\xi}{x}$ è minore di $\log \operatorname{mod} \frac{1}{r}$, per quanto sia vicino r all'unità. Questa funzione sarà dunque in R nulla o negativa. Altrettanto si dimostra per $\log \operatorname{mod} \frac{x}{\xi}$; sarà quindi

$$\log \operatorname{mod} \frac{x}{\xi} = 0.$$

Se θ è l'argomento di $\frac{x}{\xi}$, le funzioni $\log \operatorname{mod} \frac{x}{\xi} = 0$, e θ saranno armoniche coniugate. Perciò $\theta = \text{cost.}$ E, poichè per $x = 1$ è $\xi = 1$, sarà $\theta = 0$. E quindi $x = \xi$.

c. d. d.

Da questo teorema possiamo dedurre una prima conseguenza fondamentale. Agli $h + 1$ fogli della F corrisponderanno $h + 1$ pezzi della regione R, che indicheremo con K_1, K_2, ... Sia p_1

quel foglio di F, che è immagine di K_i. Poichè la F si comporta ugualmente nei suoi fogli, esisterà naturalmente una rappresentazione conforme di F su R in guisa che il foglio p_1 sia rappresentato in uno qualsiasi dei pezzi K, p. es. in K_i. Esisterà dunque una trasformazione conforme di R in sè stessa, che fa corrispondere a K_1 un altro qualsiasi dei pezzi K_i. Essa, per il teorema precedente, sarà definita da una trasformazione lineare sulla x. Esisterà dunque un gruppo G di trasformazioni lineari sulle x, che trasforma in sè stessa la rete dei campi K_i, e anzi li permuta in modo transitivo. Punti corrispondenti dei campi K_i corrispondono a punti sovrapposti dei fogli della F; e la z è dunque una funzione invariante per G, che assume ogni suo valore una e una sola volta in ognuna delle regioni K_i (campi fondamentali di G). Se R coincide con tutto il piano complesso della z, la superficie F dovrà necessariamente avere un numero finito di fogli, le regioni K_i saranno in numero finito, G sarà un gruppo discontinuo finito, e quindi un gruppo di movimenti in una metrica ellittica.

Se R coincide con tutto il piano complesso, eccettuato il punto $x = \infty$, il gruppo G potrà avere questo solo punto come punto singolare. Nessuna trasformazione di G gotrà dunque essere iperbolica, o lossodromica; e quindi G sarà un gruppo di movimenti euclidei.

Infine, se R coincide con la regione interna a un certo cerchio C, le trasformazioni di G saranno movimenti in un piano iperbolico, rappresentato conformemente entro questo cerchio.

E noi sappiamo *a priori*, per quanto abbiamo detto al principio del paragrafo, quale di questi tre casi può avvenire.

In conclusione dunque se noi riusciamo a dimostrare che F è rappresentabile conformemente su una delle regioni R, sopra citate, del piano di una variabile complessa x, noi *avremo risoluto completamente il nostro problema, e avremo anche dimostrato che la x è determinata a meno di una trasformazione lineare.*

È intanto ben evidente, come abbiamo già detto, che affinchè

R sia tutto il piano complesso di una variabile x, la F deve essere formata di un numero finito di fogli. E viceversa, se questo avviene, i ben noti teoremi di esistenza su una superficie Riemanniana ci assicurano che F si può rappresentare conformemente su tutto il piano complesso di una variabile x.

Ci resta dunque da esaminare il caso che F sia composto di infiniti fogli: e noi dimostreremo nel seguente paragrafo che in tal caso F, o si può rappresentare conformemente in tutto il piano complesso di una variabile x, a cui si tolga il punto $x = \infty$, oppure che F si può rappresentare conformemente in un'area circolare. Noi dimostreremo cioè ***che F si può rappresentare conformemente su un cerchio euclideo, di raggio finito, o infinitamente grande.***

§ 51. — Dimostrazione del precedente teorema.

Cominceremo col richiamare alcune proprietà fondamentali delle rappresentazioni conformi. Se z' è una funzione della variabile complessa z, la corrispondenza, che ne vien definita tra i piani π, π' delle due variabili complesse z, z', è una corrispondenza conforme. A un punto O di π corrisponda il punto O' di π'; se α è il valore di $\frac{dz'}{dz}$ nel punto O, allora il rapporto delle lunghezze di due archi corrispondenti l, l', di cui il primo esca da O e sia posto in π, tende ad α quando l tende a zero, o, più brevemente, se OA è un archetto infinitesimo uscente da O, e $O'A'$ l'archetto corrispondente in π', il rapporto $\frac{O'A'}{OA}$ è uguale ad α. Il numero α si dirà *il rapporto d'ingrandimento* nel punto O della nostra rappresentazione conforme.

Sia Σ un dominio semplicemente connesso di π, contenente l'origine O all'interno, e ne sia σ il contorno. Sia u la funzione di Green relativa a Σ e al punto O. Noi la indicheremo $u(\Sigma, O)$. La u sarà una funzione armonica, nulla su σ, che nel punto O diventa infinita come $\log \operatorname{mod} \frac{1}{z}$, ossia come $\log \frac{1}{r}$, quando con

r si indichino le distanze da O. Se v è la funzione armonica coniugata di u, e poniamo

$$z' = e^{-(u+iv)},$$

l'area Σ sarà rappresentata conformemente e biunivocamente nel cerchio di π', che ha l'origine O' per centro, e ha un raggio uguale all'unità. Il punto O' sarà il punto immagine di O. Troviamo il valore di $\left|\frac{dz'}{dz}\right|$ nel punto O. Per ipotesi è, in un intorno di O,

$$u = \log \frac{1}{r} + c + w,$$

dove c è una costante, w è una funzione armonica e regolare in Σ, nulla nel punto O. Si ha pure

$$v = -\theta + w_1,$$

dove θ è l'anomalia dei raggi uscenti da O, w_1 è una funzione monodroma e regolare in Σ, che noi ***supporremo nulla nel punto O.*** Questa ipotesi è lecita, perchè la w_1 è determinata a meno di una costante additiva. Quindi:

$$z' = z\, e^{-c}\, e^{-(w+iw_1)}$$

e perciò il valore di $\left|\frac{dz'}{dz}\right|$ nel punto O è uguale a e^{-c}.

Noi chiameremo c ***la costante di Koebe*** relativa al campo Σ e al punto O: e la indicheremo con $c(\Sigma, O)$. Ponendo

$$z'' = e^{-(u+iv)+c} = z'\, e^{c}$$

allora al campo Σ corrisponderà nel piano π'' della z'' un cerchio di raggio e^c, col centro nell'origine O'', immagine del punto O. Il rapporto di ingrandimento nel punto O sarà uguale all'unità. La costante di Koebe relativa a un campo Σ, e a un punto interno O sia uguale a c. Sia Σ_1 il campo trasformato di Σ mediante l'omotetia, che ha il punto O per centro, e h per rapporto di omotetia. Si trova immediatamente che la costante di Koebe, relativa a Σ_1 ed a O, è uguale a $c + \log h$.

La funzione di Green relativa a un campo Σ, e a un punto interno O è positiva entro Σ. Se Σ è un campo interno a un campo Σ_1, la differenza $u(\Sigma_1, O) - u(\Sigma, O)$ è una funzione armonica regolare in Σ, positiva al contorno, e quindi anche all'interno di Σ. In particolare è positiva la differenza $c(\Sigma_1, O) - - c(\Sigma, O)$.

Teorema di Koebe. — *Se Σ è un campo semplicemente connesso di π, tutto posto a distanza finita, e contenente l'origine O all'interno, esiste un numero non nullo K tale che il cerchio di centro O e di raggio K è interno a tutti i campi Σ' di π, che contengono O e che sono rappresentabili conformemente su Σ, in guisa che il punto O corrisponda a sè stesso in questa rappresentazione, e che il rapporto di ingrandimento nel punto O sia uguale all'unità.*

Le ipotesi di questo teorema si possono anche esprimere dicendo che i campi Σ, Σ' contengono tutti all'interno il punto O, e che le costanti di Koebe $c(\Sigma, O)$, $c(\Sigma', O)$ relative a uno di questi campi e al punto O sono tutte uguali. Basterà dimostrare che in queste ipotesi la minima distanza da O a un punto del contorno di uno di questi campi non è infinitesima. Basterà anche dimostrare che:

Se Σ è un campo semplicemente connesso di π, tutto a distanza finita, contenente il punto O all'interno, se σ ne è il contorno, e se γ è la minima distanza da O a un punto di σ, allora la costante di Koebe c relativa a Σ ed a O è minore della somma $\Lambda + \log \gamma$ ($\Lambda =$ cost. indipendente da Σ e da γ).

Infatti, dimostrato questo teorema, ne risulterà dimostrato che al diminuire indefinito della minima distanza da O a un punto del contorno di Σ', la costante di Koebe $c(\Sigma', O)$ non può conservare uno stesso valore, ma deve tendere a $-\infty$.

Dimostriamo dunque quest'ultima proposizione. Se trasformiamo Σ con una omotetia di centro O, e di rapporto $\frac{1}{\gamma}$, Σ sarà portato in un campo Σ_1 tale che la minima distanza da O a un punto di Σ_1 è uguale all'unità. Sarà $c(\Sigma, O) = c(\Sigma_1, O) + \log \gamma$.

Basterà dunque dimostrare l'esistenza di una costante Λ tale che $c(\Sigma_1, O) < \Lambda$. Ora, poichè una rotazione di Σ_1 attorno al punto O non muta la relativa costante $c(\Sigma_1, O)$, potremo supporre che il contorno di Σ_1 contenga il punto $z = 1$.

Poniamo $z = 1 + \frac{1}{4} t^2$ e fissiamo in Σ_1 il valore della t, prefissando che sia $t = +2i$ nel punto O ($z = 0$). Siccome, mentre noi ci moviamo in Σ_1, non possiamo girare attorno al punto $z = 1$, la t sarà determinata univocamente per tutti i punti di Σ_1. Al cerchio di raggio $\frac{1}{2}$, che ha per centro il punto O nel piano della z, corrispondono nel piano τ della variabile t due regioni R', R'', poste a distanza finita, che non hanno a comune alcun punto. A una di esse, p. es. a R', è interno il punto A ($t = 2i$), all'altra è interno il punto $t = -2i$. Quella regione Σ', che è, secondo le nostre convenzioni, immagine di Σ_1 in τ, conterrà all'interno tutta la regione R' e sarà completamente esterna alla regione R''. Il rapporto d'ingrandimento nel punto O per la rappresentazione conforme di Σ_1 su Σ' è uguale a $\left|\frac{dz}{dt}\right|_{t=2i} = 1$. Indicheremo con Σ'' il campo, che si ottiene da τ sopprimendone il campo R''. Noi potremo rappresentare conformemente τ su un altro piano τ_1, in guisa che Σ'' abbia per immagine un campo Σ''_1 tutto posto a distanza finita, che A abbia per immagine un punto A' in guisa che il rapporto d'ingrandimento sia ivi uguale all'unità. Il campo Σ' avrà in τ_1 per immagine un campo Σ'_1 tutto interno a Σ''_1, e contenente al suo interno il punto A'. La costante di Koebe relativa a Σ_1 ed a O, sarà uguale alla costante $c(\Sigma', A)$, ossia alla costante di Koebe relativa a Σ'_1 ed a A', la quale, per quanto precede, sarà minore della costante di Koebe Λ, relativa al punto A' e a Σ''_1.

c. d. d.

Sia Σ un cerchio di raggio e^{λ} e di centro O. Le aree Σ', rappresentabili conformemente su Σ, in guisa che il punto O corrisponda a sè stesso, e il rapporto d'ingrandimento sia in O uguale all'unità, conterranno dunque all'interno un cerchio di

centro O, il cui raggio *non nullo* sarà una funzione di h, che noi indicheremo con $d(h)$. Se h aumenta di una costante α, evidentemente $d(h)$ resta moltiplicato per e^{α}; e quindi:

$$\lim_{h=+\infty} d(h) = +\infty.$$

Se u è la funzione di Green relativa a un campo Σ di π, e a un punto interno O, e v è la funzione armonica coniugata (pag. 379), h è una costante reale qualsiasi, c è la costante di Koebe, la funzione

$$Z = U + i\,V = e^{-c}\,(e^{u+iv+ih} - e^{-(u+iv+ih)})$$

diventa nel punto O infinita come $\frac{e^{ih}}{z}$, e sul contorno di Σ diventa puramente immaginaria e oscilla tra $2\,i\,e^{-c}$ e $-2\,i\,e^{-c}$. Il campo Σ è rappresentato conformemente sul piano di Z, tagliato lungo un segmento dell'asse immaginario, che ha il punto 0 come punto di mezzo, e la lunghezza $4\,e^{-c}$. Al punto O corrisponde il punto ∞ nel piano della Z.

Se Σ e Σ' sono due campi, che hanno ambedue all'interno il punto O, e se la minima distanza da O al contorno di Σ, o di Σ' è uguale a d, allora nel campo comune a Σ, Σ' vale la:

$$|U - U'| \leq \frac{2}{d},$$

se con $U' + i\,V'$ indico la funzione, costruita per il campo Σ' nello stesso modo con cui abbiamo costruito più sopra la funzione $U + i\,V$ per il campo Σ.

Infatti la $U - U'$ è una funzione armonica regolare nel campo comune a Σ, Σ'. Sia $R\left(\frac{e^{ih}}{z}\right)$ la parte reale di $\frac{e^{ih}}{z}$. Sul contorno di Σ è

$$\left|U - R\left(\frac{e^{ih}}{z}\right)\right| = \left|R\left(\frac{e^{ih}}{z}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{z}\right| \leq \frac{1}{d}.$$

E sul contorno di Σ' vale similmente la

$$\left|U' - R\left(\frac{e^{ih}}{z}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{z}\right| \leq \frac{1}{d}.$$

Essendo $U - R\left(\frac{e^{ih}}{z}\right)$, $U' - R\left(\frac{e^{ih}}{z}\right)$ funzioni armoniche regolari rispettivamente in Σ e Σ', queste due disuguaglianze saranno ancora vere l'una in Σ, l'altra in Σ'; ed entrambe saranno vere nell'area comune a Σ e Σ', donde segue il teorema del testo.

Ricorderemo ora due teoremi sulla serie di funzioni armoniche (*).

TEOREMA DI HARNACK. — *Se una serie di funzioni armoniche positive regolari in un' area Σ converge in un punto O, interno a Σ, essa converge uniformemente in ogni regione perfetta Σ', tutta interna a Σ.* Questo teorema vale naturalmente anche per le *successioni crescenti* di funzioni armoniche.

Una serie di funzioni armoniche regolari, convergente uniformemente in un' area Σ, rappresenta una funzione armonica.

Se una successione di funzioni armoniche $u_1, u_2, u_3, \ldots$ converge uniformemente in un campo Σ verso una funzione u, necessariamente armonica, e se x, y sono coordinate dei punti di H, anche la successione delle $\frac{\partial u_i}{\partial x}$, o delle $\frac{\partial u_i}{\partial y}$ converge uniformemente verso $\frac{\partial u}{\partial x}$ o $\frac{\partial u}{\partial y}$; le funzioni armoniche v_i coniugate delle u_i, nulle in un punto A di Σ, tendono in Σ uniformemente alla funzione armonica v, coniugata di u, e nulla nel punto A.

TEOREMA DI OSGOOD. — *Se $K_1, K_2, K_3 \ldots$ sono infiniti campi semplicemente connessi del piano π della variabile complessa z, contenenti tutti all' interno l' origine O, e ciascuno dei quali è interno a tutti i successivi, se essi sono tutti interni a uno stesso cerchio H di centro O, e di raggio finito, allora la*

$$u = \lim_{i=\infty} u(K_i, O)$$

esiste, è una funzione armonica, che diventa infinita come $\log \frac{1}{r}$ in O, e si annulla sul contorno del campo K, ricoperto dalle aree K_i.

(*) Cfr. PICARD. *Traité d'Analyse*, Tomo IV, pag. 59 (2.ª ed.).

Sia γ_i il contorno di K_i, e scegliamo su esso ad arbitrio un punto A_i. Sia A un punto limite dell'insieme dei punti A_i. Ogni intorno di A è attraversato da infiniti dei cammini γ_i: il punto A è quindi esterno ad ogni campo K_i. Siano B, C due punti esterni ad H: e sia rispettivamente $z = \alpha$, $z = \beta$, $z = \gamma$ in A, B, C. Sia $I(\tau)$ una funzione di una variabile τ, invariante per le trasformazioni del gruppo modulare G. Essa assumerà una e una sola volta ogni suo valore entro un campo fondamentale Δ di questo gruppo. (Cfr. § 26, pag. 161 e § 45, pag. 322).

Con una opportuna trasformazione lineare sulla I potremo fare in modo che sia $I = \alpha$, $I = \beta$, $I = \gamma$ nei tre cicli di vertici non accidentali di Δ, e che precisamente sia $I = \alpha$ in quel ciclo di vertici, che è posto a distanza infinita nella corrispondente metrica di Bólyai. Potremo poi, con una trasformazione lineare sulla τ, fare in modo che il campo Δ, e i campi trasformati riempiano il cerchio mod $\tau = 1$, che il campo Δ contenga al suo interno il punto O' ($\tau = 0$), e che per $\tau = 0$ sia $I = 0$. Il campo Δ sarà un quadrangolo (con un angolo piatto): un suo vertice A' è posto sul cerchio mod $\tau = 1$, e in esso $I = \alpha$, gli altri suoi vertici sono entro al cerchio precedente. Un secondo vertice B' costituisce da solo un ciclo, e in esso è p. es. $I = \beta$: gli altri due vertici C', C'' costituiscono insieme un altro ciclo, ed in essi è $I = \gamma$. I lati $B'C'$, $B'C''$ sono equivalenti. Se noi poniamo $z = I(\tau)$, a questi due lati corrisponde sul piano della z una linea L, congiungente i punti B, C. E noi potremo sempre operare su Δ un tal cambiamento lecito che L non abbia alcun punto comune con K (*). Essendo stato posto $z = I(\tau)$, a un valore qualunque di z, differente da α, β, γ, corrispondono infiniti valori di τ, trasformati l'uno dell'altro mediante le trasformazioni del gruppo modulare. Per $\tau = 0$ è $z = 0$. Dunque uno dei valori di τ nel punto O è il valore $\tau = 0$. Diamo a τ per $z = 0$ questo valore

(*) Questa condizione ha il solo scopo di rendere più intuitive le seguenti considerazioni.

$\tau = 0$. Sarà così fissato univocamente per continuità il valore di τ per ogni punto dei campi K_i (tutti esterni ai punti A, B, C) e quindi anche per ogni punto del campo K. I punti del campo K saranno posti così in corrispondenza biunivoca continua coi punti di un certo campo K' del piano di τ, tutti interni al cerchio mod $\tau = 1$, e a due a due *non* equivalenti rispetto al gruppo G. Anzi, poichè K non ha punti comuni con L, il campo K' non avrà punti comuni col lato $B'C'$ di Δ, e coi lati equivalenti degli altri campi fondamentali. Il campo K' sarà dunque interno a quella regione R del cerchio mod $\tau = 1$, che è ricoperta da Δ, e da quei triangoli equivalenti, che con Δ hanno comune il vertice A'.

I campi K_i avranno per immagine sul piano della τ dei campi K'_i, interni a K'. Ed evidentemente

$$u(K_i, O) = u(K'_i, O').$$

Ora $\log \bmod \frac{1}{\tau} - u(K'_i, O')$ è regolare in O', qualunque sia i, ed è positivo in K'_i, perchè sul contorno di K'_i è evidentemente

$$|\tau| < 1, \qquad \log \bmod \frac{1}{\tau} > 0, \qquad u(K'_i, O') = 0.$$

Quindi in K_i è

$$\log \bmod \frac{1}{\tau} > u(K_i, O).$$

Di più si ha

$$u(K_i, O) < u(K_{i+1}, O) < u(H, O).$$

Per il teorema di Harnack la successione *crescente* delle $u(K_i, O)$ è convergente in tutto K verso una funzione armonica u limite, finita in tutto K (eccetto che nel punto O). Dalle ultime disuguaglianze si trae

$$\log \bmod \frac{1}{\tau} \geqq u \geqq 0.$$

Ma ora, quando noi ci avviciniamo al punto A entro K, il punto corrispondente del piano di τ si avvicina ad A', muovendosi entro R; il valore corrispondente di mod τ tende quindi a 1, cosicchè $\log \bmod \frac{1}{\tau}$ tende a zero.

Quindi, quando noi ci avviciniamo al punto A, è

$$\lim u = 0.$$

La u tende dunque a zero, quando ci si avvicina a un punto qualsiasi A del contorno di K, come appunto si voleva dimostrare.

Premessi tutti questi lemmi, possiamo affrontare la nostra questione. Siano $F_1, F_2, F_3 \dots$ quei campi della F, che sono limitati rispettivamente da $C_1, C_2, \dots$ Essi saranno a un numero finito di fogli, semplicemente connessi: un campo F_i è interno ai campi $F_{i+j} (j > 0)$; ogni punto, in cui non si diramano infiniti fogli, è interno ad almeno uno dei campi F_i e quindi anche a tutti i campi successivi. Sia O un punto, non di diramazione, interno a F_1. Sia u_i la funzione di Green relativa a F_i e al punto O; e c_i la relativa costante di Koebe. In F_i sarà $u_{i+j} > u_i$, se $j > 0$. La serie

$$(\alpha) \qquad (u_{i+1} - u_i) + (u_{i+2} - u_{i+1}) + \dots$$

ha dunque per termini delle funzioni armoniche, regolari e *positive* in F_i. Nel punto O questa serie si riduce alla serie, ancora a ***termini positivi***,

$$(\beta) \qquad (c_{i+1} - c_i) + (c_{i+2} - c_{i+1}) + \dots$$

Questa serie non può essere indeterminata, ma converge se $c = \lim_{i=\infty} c_i$ è finito, diverge se $c = \lim_{i=\infty} c_i$ è uguale a $+\infty$.

Studiamo il primo caso. La serie (α) converge nel punto O; per il citato teorema di Harnack, essa convergerà uniformemente in ogni campo interno a F_i e avrà per somma una funzione u armonica. In altre parole in ogni regione regolare F' di F le funzioni u_i tenderanno ***uniformemente*** a una funzione armonica limite u, che sarà dappertutto regolare, eccetto che nel punto O, ove diventerà infinita come $\log \frac{1}{r}$.

Con v_i indichiamo quella funzione armonica coniugata di u_i, che in un intorno del punto O è uguale alla somma di $-\theta$ ($\theta =$

anomalia), e di una funzione armonica nulla nel punto O. Le v_i tenderanno uniformemente in ogni regione regolare F' di F a una funzione v, armonica coniugata della u.

Teorema. — *La funzione* $x = e^{-(u+iv)}$ *è regolare e monodroma in* F, *e vi assume una e una sola volta ogni valore, minore in modulo di* 1. *Nel punto* O *si ha* $x = 0$; *la* F *ha dunque per immagine nel piano della* x *quel cerchio di raggio uguale a* 1, *che ha per centro l'origine. L'origine corrisponde al punto* O; *un punto qualunque del nostro cerchio è immagine di uno e un solo punto di* F.

Dimostrazione. — Osserviamo che u diventa singolare soltanto nel punto O, e precisamente vi è singolare come $\log \frac{1}{r}$; la v è dunque determinata a meno di multipli di 2π; e quindi x è monodroma sulla F.

Posto $x_n = e^{-(u_n + iv_n)}$, la x_n esiste in F_n e vi è non maggiore di 1 in modulo; poichè in ogni punto regolare di F è $x = \lim_{n=\infty} x_n$, in ogni punto regolare di F sarà $|x| \leq 1$.

Io dico che in punti distinti di F la x assume valori distinti; se ciò infatti non fosse, esisterebbero due punti distinti A, B, in cui la x assume lo stesso valore a; e noi potremmo chiaramente costruire in F un campo regolare F', contenente all'interno i punti A, B, e sul cui contorno α fosse $x \neq a$. Esisterebbe una costante positiva non nulla m, tale che su α sarebbe $|x - a| > 2m$. E noi potremmo trovare un intero i così grande, che x_i esisterebbe in tutto F', e che in F' varrebbe la $|x_i - x| < m$.

Ora $\frac{x_i - a}{x - a} = 1 + \frac{x_i - x}{x - a}$. Quando si descrive il contorno α, è $2|x_i - x| < 2m < |x - a|$, e quindi $\left|\frac{x_i - x}{x - a}\right| < \frac{1}{2}$; cosicchè $R\left(\frac{x_i - a}{x - a}\right) > \frac{1}{2}$. Al cammino α corrisponderebbe quindi nel piano della variabile $\frac{x_i - a}{x - a}$ un cammino chiuso, che non conterrebbe all'interno l'origine. Entro F' la $\frac{x_i - a}{x - a}$ diventerebbe dunque nulla tante volte, quante diventa infinita. E quindi la x_i assumerebbe due volte il valore a in F': ciò che è assurdo.

Si tratta ora di dimostrare che la x riceve in F ogni valore, minore in modulo di 1. Osserviamo che alla F corrisponderà sul piano della x una certa area H, che si deve dimostrare coincidente col cerchio, che ha per centro il punto $x = 0$, e per raggio l'unità. Ai cammini $C_1, C_2, \ldots$ corrisponderanno delle linee chiuse $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, ciascuna delle quali è tutta interna alle successive, e racchiude un'area H_i. Tutte queste aree sono per ipotesi interne al cerchio di centro O e di raggio uguale a 1. La u_i, considerata quale funzione dei punti di H_i, coincide con la funzione di Green $u(H_i, O)$. Quindi, per il teorema di Osgood, la $u = \lim_{i=\infty} u(H_i, O)$ diventa infinitesima se il punto, in cui se ne calcola il valore tende al contorno di H. Ne verrà che sul contorno di H il mod x assume il valore 1: ossia che H è proprio il cerchio, che ha per centro il punto $x = 0$, e per raggio l'unità.

Il caso che esista e sia finito il $\lim_{i=\infty} c_i$ è dunque esaurito, e ci rimane dunque da studiare il solo caso che $\lim_{i=\infty} c_i = \infty$. In tal caso, se noi rappresentiamo conformemente $F_{j+\nu}$ su un cerchio L in guisa che al punto O corrisponda il centro O' di L, e che il rapporto d'ingrandimento in O sia uguale all'unità, il raggio $e^{c_{j+\nu}}$ di questo cerchio tende all'infinito con $j + \nu$. In questa rappresentazione a F_j corrisponderà un campo $\Sigma_j^{(\nu)}$, che si può rappresentare conformemente su un cerchio di centro O' e di raggio e^{c_j}, in guisa che il punto O' corrisponda a sè stesso, e il rapporto d'ingrandimento vi sia uguale all'unità. Per il teorema di Koebe, la minima distanza da O' al contorno di $\Sigma_j^{(\nu)}$ sarà dunque maggiore di una costante d_j, che tende all'infinito con j. Posto $U_j + i V_j = e^{-c_j}(e^{u_j + iv_j} - e^{-(u_j + iv_j)})$, consideriamo U_j e $U_{j+\nu}$ come funzioni dei punti di $\Sigma_j^{(\nu)}$ e di L; troviamo (pag. 382) che in $\Sigma_j^{(\nu)}$ (e quindi anche in F_j) è $|U_{j+\nu} - U_j| < \dfrac{2}{d_j}$, qualunque sia il valore di ν. Poichè $\lim_{i=\infty} d_i = \infty$, le funzioni U_i tenderanno uniformemente in ogni campo F_j a un limite determi-

nato e finito, che sarà una funzione U armonica sulla F. Le funzioni V_i tenderanno alla funzione V armonica coniugata.

Se π_j è il piano della variabile $U_j + i V_j$, il campo F_j ha su π_j per immagine il piano π_j stesso, tagliato lungo il segmento σ_j dell'asse immaginario, che ha l'origine per punto di mezzo, e per lunghezza $4 \pi e^{-c_j}$. In F_j la $U_j + i V_j$ assume una e una sola volta ogni valore, che non appartenga a questo segmento.

Dimostreremo ora che $U + i V$ assume in F ogni valore a, che sia ***differente da zero***. Supponiamo dapprima che la parte reale di a (che noi indichiamo con $R(a)$) sia differente da zero. E sia ε una costante positiva non nulla minore di $R(a)$. Sia j un intero così grande che $\frac{2}{d} < \varepsilon$, e che in F_j sia quindi $|U_{j+\nu} - U_j| < \varepsilon$ per ogni valore positivo di ν. Nel piano della variabile $U_{j+\nu} + i V_{j+\nu}$ a $F_{j+\nu}$ corrisponde il piano stesso, tagliato lungo il segmento $\sigma_{j+\nu}$ e a F_j corrisponde un campo $S_j^{(\nu)}$; ma poichè $|U_{j+\nu} - U_j| < \varepsilon$, e poichè sul contorno di F_j è $U_j = 0$, il contorno di $S_j^{(\nu)}$ sarà tutto interno alla striscia limitata dalle due rette $U_{j+\nu} = -\varepsilon$, $U_{j+\nu} = \varepsilon$. I punti di $F_{j+\nu}$, esterni a F_j, avranno per immagine punti interni a questa striscia; e quindi il punto A_ν di F, in cui $U_{j+\nu} + i V_{j+\nu}$ assume il valore a, è interno a F_j; e se A è un punto di F, che sia punto limite dell'aggregato di punti A_ν, la $U + i V$ assume in A evidentemente il valore a.

Sia ora $R(a) = 0$. Poniamo

$$U'_j + i V'_j = e^{-c_j} \left[e^{u_j + i v_j + i \varphi} - e^{-(u_j + i v_j + i \varphi)} \right],$$

dove φ è una costante reale, che non sia multipla di π. Come sopra si dimostrerà che F_j ha per immagine sul piano della $U'_j + i V'_j$ il piano stesso, tagliato lungo il solito segmento σ_j, e che esiste in tutto F la funzione $U' + i V' = \lim\limits_{j=\infty} (U'_j + i V'_j)$. Come sopra si dimostra che $U' + i V'$ assume in F ogni valore, che non sia puramente immaginario: ad es. il valore $a e^{i\varphi}$. Ma facilmente (*) si trova $U + i V = e^{-i\varphi} (U' + i V')$. E, poichè

(*) Si ricordi che per ipotesi $\lim c_s = \lim u_s = +\infty$, e quindi $\lim e^{-c_s} e^{-(u_s + i v_s)} = 0$.

la $U' + i\,V'$ assume il valore $a\,e^{+i\varphi}$, la $U + i\,V$ assumerà il valore a.

Come nel caso precedente si dimostra poi che $U + i\,V$ non può assumere in F due volte lo stesso valore.

La F è dunque rappresentata conformemente e biunivocamente sul piano della variabile $U + i\,V$, a cui si tolga l'origine, e quindi sul piano della variabile $\frac{1}{U + i\,V}$, a cui si tolga il punto all'infinito.

Il nostro teorema è così completamente dimostrato.

Osserviamo che, essendo in quest'ultimo caso

$$\lim c_s = +\infty, \quad \lim e^{-c_s - u_s - iv_s} = O,$$

$$U_s + i\,V_s = e^{-c_s}\left[e^{u_s + iv_s} - e^{-(u_s + iv_s)}\right],$$

$$U + i\,V = \lim (U_s + i\,V_s),$$

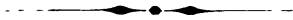
si ha che il

$$\lim_{s=\infty} e^{-(u_s + iv_s) + c_s}$$

esiste, ed è uguale a $\frac{1}{U + i\,V}$. Questo ultimo limite esiste dunque tanto se c è finito, quanto se c è infinito. E poichè sul piano della variabile $e^{-(u_s + iv_s) + c_s}$ la regione F_s è rappresentata conformemente su un cerchio, in guisa che il punto O corrisponda all'origine, e il rapporto di ingrandimento in O sia uguale a uno, ne deduciamo:

Se noi rappresentiamo conformemente F_s su un cerchio di un piano α, in guisa che il punto O corrisponda all'origine, e il rapporto d'ingrandimento in O sia uguale a 1, e passiamo poi al limite per $s = \infty$, otteniamo una rappresentazione conforme e biunivoca di F su un cerchio del piano α, di centro O e di raggio finito o infinito.

Osservazione I. — Nello studio precedente noi siamo partiti da una funzione polidroma W di una variabile z. È ben evidente che avremmo potuto nello stesso modo considerare un sistema di funzioni polidrome W della z, e cercare una variabile ausiliaria x, di cui la z fosse funzione automorfa, le W funzioni uniformi.

Osservazione II. — Invece di parlare di una funzione polidroma di una variabile z, avremmo potuto parlare di una funzione W, o di un sistema di funzioni polidrome W su una superficie Riemanniana S, immagine di una curva algebrica $f(y, z) = 0$. Le precedenti considerazioni si possono ripetere per questo caso con poche modificazioni. La superficie F si costruirebbe, sovrapponendo l'una all'altra più superficie identiche a S, anzichè sovrapporre semplicemente dei piani. Si troverebbe ancora una variabile ausiliaria x, di cui le y, z sono funzioni automorfe, la W o le funzioni W sono funzioni uniformi.

Osservazione III. — Noi abbiamo ammesso che la funzione W avesse un numero finito di punti di diramazione nel piano della z. Se i punti di diramazione fossero in numero infinito, noi non potremmo senz'altro applicare i procedimenti precedenti per costruire la superficie Riemanniana F. Se noi però, con un metodo qualsiasi, riuscissimo a costruire una superficie F, su cui la W fosse monodroma, la quale si potesse considerare come limite di infinite regioni F, semplicemente connesse, e a un numero finito di fogli, allora i metodi e le conclusioni precedenti sarebbero senz'altro applicabili.

Noi vogliamo ora indicare un caso assai generale, in cui questo è possibile. Supponiamo che gli infiniti punti di diramazione della $W (z = a_1,\ z = a_2, \ldots\ldots)$ abbiamo un *unico* punto limite $z = a$ (*), e che i corrispondenti valori delle costanti λ_i sieno tutte uguali a ∞ (**). Entro un cerchio C di un piano α immaginiamo rappresentata conformemente una metrica di Bólyai. Scegliamo su C infiniti punti $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$, che si seguano nel

(*) Il procedimento seguente vale anche se questi punti limiti sono in numero finito, e anche in casi più generali.

(**) Il caso che tutte le costanti λ_i sono uguali a ∞ è specialmente importante; in quanto che se per esso si sa trovare la variabile ausiliaria x, le funzioni diramate soltanto nei punti $z = a_i$ sono *tutte* funzioni uniformi della x.

verso qui indicato e tendano a un punto A di C. Tiriamo le geodetiche $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, ... e riflettiamo la figura così ottenuta attorno alla geodetica $A_1 A$. Otteniamo così un poligono H con infiniti vertici, che può servire di campo fondamentale a un gruppo fuchsiano Γ. Gli stessi metodi, che abbiamo usato al § 49, servono anche nel caso attuale a costruire la superficie F.

APPENDICE.

FUNZIONI MODULARI E IPERMODULARI

La teoria delle funzioni ellittiche e iperellittiche, e la stessa teoria delle funzioni fuchsiane ci danno esempii di funzioni automorfe e cremoniane, che soltanto in parte rientrano nelle teorie che noi abbiamo svolto fin qui. Queste funzioni si possono denominare funzioni *modulari* o *ipermodulari:* un tale nome è dovuto a ragioni storiche, e trae l'origine dal nome di ***modulo***, che viene dato a un certo parametro nella teoria delle funzioni ellittiche di Iacobi. Le funzioni invarianti per il gruppo modulare offrono il primo esempio di questa categoria di funzioni.

Dalla teoria delle curve algebriche è noto che ogni curva C di genere $p > 0$ dipende da un certo numero h di ***moduli*** ($h = 1$, se $p = 1$, $h = 3p - 3$ se $p > 1$), in questo senso, che se noi non riguardiamo come distinte due curve, che si possono porre in corrispondenza biunivoca algebrica, dette curve, considerate come punti, formano un'unica varietà ad h dimensioni. In altre parole si possono trovare h costanti (funzioni dei coefficienti delle equazioni della curva C), le quali rimangono inalterate allora e allora soltanto che alla C si sostituisca una curva C', i cui punti sono in corrispondenza biunivoca algebrica coi punti

di C. Preciseremo ancor meglio questo concetto. Se $p=1$, la curva C si può porre in corrispondenza biunivoca algebrica coi punti di una cubica piana C'. A modulo di C si può assumere uno dei birapporti delle quattro tangenti, che si possono tirare a C' da un punto A di C'; il quale, come è noto, non dipenderà da A. Se invece $p>1$, la curva C si potrà ancora porre in corrispondenza biunivoca algebrica con una curva piana C'; siano $\varphi_i=0$ $(i=1,2,\ldots,p)$ p curve aggiunte generiche di C' (siano cioè le φ_i proporzionali ai differenziali di p integrali abeliani generici di prima specie); e sia C'' la curva dello spazio a $p-1$ dimensioni, in cui z_i $(i=1,2,\ldots,p)$ sono coordinate omogenee, che è definita dalle $z_i=\varphi_i$. La C'' sarà, in generale, in corrispondenza biunivoca algebrica con C; e come *moduli* della C potremo assumere gli invarianti proiettivi di C''. (Cfr. più specialmente a pag. 395 e 396 per i casi di $p=1$, $p=2$).

I moduli così trovati si diranno ***moduli algebrici***, in quanto che essi sono funzioni algebriche dei coefficienti delle equazioni di C.

Ricordati brevemente questi teoremi, possiamo dare la seguente definizione generale:

Si dice ***sistema di moduli di una curva di genere p, un sistema di quantità tali che, se uno stesso sistema corrisponde a due curve distinte C, C', le due curve sono in corrispondenza biunivoca algebrica.*** I moduli algebrici, più sopra definiti, godono anche della proprietà inversa: che cioè due curve in corrispondenza biunivoca algebrica hanno lo stesso sistema di moduli algebrici.

Sia ora data una curva C di genere p; dato un sistema normale di tagli che renda semplicemente connessa la corrispondente superficie riemanniana F, noi potremo definire p integrali abeliani di prima specie $i_1, i_2, \ldots, i_p$ normali rispetto al dato sistema di tagli. I periodi di i_k $(k=1,2,\ldots,p)$ saranno $\varepsilon_{k1}, \varepsilon_{k2}, \ldots, \varepsilon_{kp}, x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kp}$, dove $\varepsilon_{kh}=0$ per $h \neq k$, $\varepsilon_{hh}=1$, e dove le x_{kh} sono costanti, che soddisfano alle

$$x_{hk}=x_{kh} \qquad (h,k=1,2,\ldots,p).$$

Di più, se poniamo $x_{ik} = x_{ik}^{(1)} + \sqrt{-1}\ x_{ik}^{(2)}$, la forma $\sum_{i,k} y_i\, y_k\, x_{ik}^{(2)}$ deve essere una forma definita positiva delle y.

Le quantità x_{ik} (in virtù delle $x_{ik} = x_{ki}$) si riducono a $\frac{p\,(p+1)}{2}$ quantità distinte. E dalla teoria delle serie θ è noto che queste quantità si possono assumere come un sistema di *moduli* per la curva corrispondente. Ma, siccome $\frac{p\,(p+1)}{2} > 3\,p - 3$ per $p > 3$, tra le $\frac{p\,(p+1)}{2}$ quantità x_{ik} esistono (se p è maggiore di 3) $\frac{p\,(p+1)}{2} - 3\,p + 3 = \frac{(p-2)\,(p-3)}{2}$ relazioni distinte (che Schottky scrisse in modo esplicito nel caso di $p = 4$) (*).

Le $\frac{p\,(p+1)}{2}$ quantità x_{ik} (tra cui esistono $\frac{(p-2)\,(p-3)}{2}$ relazioni) si diranno *moduli trascendenti*. Ora consideriamo i moduli algebrici sopra definiti come funzioni ψ dei moduli trascendenti x_{ik}. È facile trovare un gruppo G di trasformazioni sulle x_{ik}, che trasforma in sè stesse queste funzioni ψ. Basta osservare che, data la superficie Riemanniana F, il sistema dei tagli che la rende semplicemente connessa, non è determinato, ma si può scegliere in infiniti modi. Al variare di questo sistema di tagli, variano anche le x_{ik}; e precisamente le x_{ik} subiscono le trasformazioni di un gruppo discontinuo G. *Le funzioni* ψ, che abbiamo considerato più sopra, *sono appunto invarianti per* G.

Noi vogliamo esaminare, a titolo di esempio, i casi specialmente notevoli di $p = 1$, o $p = 2$.

Genere $p = 1$. Una curva di genere 1 si può sempre porre in corrispondenza biunivoca algebrica con una cubica

$$y^2 = 4\,x^3 - g_2\,x - g_3$$

L'invariante assoluto $z = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\,g_3^2}$ si può assumere come *modulo algebrico* di questa curva. Un integrale abeliano v di prima specie abbia, relativamente a un certo sistema normale di tagli, i periodi ω_1, ω_2; l'integrale abeliano normale avrà i perio-

(*) Schottky. *Zur Theorie der Abelschen Functionen von vier Variabeln. Crelles Journal* Bd. 102. 1888. — *Ueber die Moduln der Thetafunctionen Acta Matematica*, Vol. 27. 1904.

questa, che posto $x = x^{(1)} + \sqrt{-1}\, x^{(2)}$, la forma $x^{(2)} y^2$ della variabile y sia definita positiva, ossia che $x^{(2)}$ sia positivo.

Facciamo variare ora il sistema normale di tagli; i periodi, che v avrà rispetto al nuovo sistema, siano ω'_1, ω'_2. Dovrà essere naturalmente

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} \omega'_1 &= n_{11}\,\omega_1 + n_{12}\,\omega_2 \\ \omega'_2 &= n_{21}\,\omega_1 + n_{22}\,\omega_2 \end{aligned}\right\} (n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22} \text{ numeri interi}).$$

Viceversa, poichè ω_1, ω_2 devono pure essere combinazioni lineari a coefficienti costanti delle ω'_1, ω'_2, sarà $n_{11}\,n_{22} - n_{12}\,n_{21} = \pm 1$. L'integrale abeliano normale rispetto al nuovo sistema di tagli avrà i periodi $1, x'$, dove

$$(1)' \qquad x' = \frac{\omega'_2}{\omega'_1} = \frac{n_{21} + n_{22}\,x}{n_{11} + n_{12}\,x}.$$

Poichè il coefficiente della parte immaginaria di x' deve essere positivo, sarà $n_{22}\,n_{11} - n_{21}\,n_{12} > 0$, e quindi

$$n_{22}\,n_{11} - n_{21}\,n_{12} = 1.$$

Il gruppo G, generato dalla (1)', coincide quindi col *gruppo modulare*, che noi abbiamo già studiato al § 26 (pag. 161 e seg.), e per cui abbiamo trovato allora un campo fondamentale. L'invariante z è dunque una funzione, trasformata in sè stessa dal gruppo modulare. Ciò del resto si può anche verificare direttamente. Infatti dalla teoria delle funzioni ellittiche è ben noto che il rapporto $g_2^3 : g_3^2$ è uguale, a meno di un fattore numerico, a $\left(\Sigma \frac{1}{(m\,\omega_1 + n\,\omega_2)^4}\right)^3 : \left(\Sigma \frac{1}{(m\,\omega_1 + n\,\omega_2)^6}\right)^2$, dove le sommatorie sono estese a tutti i sistemi possibili di valori interi per m, n, eccetto che al sistema $m = n = 0$. Ed è ben evidente che ambedue queste sommatorie sono invarianti per una trasformazione (1), quando $n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}$ sono interi soddisfacenti alla $n_{11}\,n_{22} - - n_{12}\,n_{21} = 1$.

Genere $p = 2$. Ogni curva C di genere 2 si può porre in corrispondenza biunivoca algebrica con una curva

$$y^2 = x^5 + a_1\,x^4 + a_2\,x^3 + a_3\,x^2 + a_4\,x + a_5,$$

di 1, $x = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. L'unica condizione a cui deve soddisfare x è

la quale possiede *tre* invarianti assoluti indipendenti (funzioni razionali delle a) z_1, z_2, z_3, che si possono riguardare come un sistema di ***moduli algebrici*** per la C. Se u è un integrale abeliano di prima specie, e se $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ sono i suoi periodi rispetto a un sistema normale di tagli, noi assumeremo $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ come coordinate omogenee in uno spazio S a tre dimensioni. Se u, v sono due integrali abeliani indipendenti di prima specie, se ω_i e ω'_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sono i loro periodi, ogni altro integrale abeliano w di prima specie è del tipo $\alpha u + \beta v + \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma = \text{cost.})$; i periodi ω''_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ di w sono uguali quindi ad $\alpha\omega_i + \beta\omega'_i$. Il punto di S, che è individuato da w secondo le nostre convenzioni, avrà per coordinate le $\alpha\omega_i + \beta\omega'_i$ e giacerà quindi sulla retta r che congiunge i punti individuati rispettivamente dagli integrali u, v. Questa retta è quindi indipendente dai particolari integrali u, v considerati; e dipende perciò soltanto dalla curva C e dal sistema normale di tagli, rispetto al quale si sono calcolati i periodi. Agli integrali abeliani normali di prima specie relativi alla nostra curva corrispondono poi quei punti di S, in cui r incontra rispettivamente i piani $\omega_2 = 0$, $\omega_1 = 0$.

Il dare dunque la retta r individua senza ambiguità i ***moduli trascendenti*** di C: e per studiare come un cambiamento del sistema normale di tagli trasforma i moduli trascendenti di C, basterà studiare come esso trasforma la retta r.

Osserviamo ora che le coordinate Plückeriane $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{34}, p_{42}$ di una retta di S sono date dalle $p_{ik} = \omega_i\omega'_k - \omega_k\omega'_i$, e soddisfano identicamente alla

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Per la relazione che lega i periodi di 2 integrali abeliani di prima specie, una retta r di S, che corrisponda nel modo sopra esposto a una qualsiasi curva di genere 2, soddisferà ancora alla:

$$p_{13} - p_{42} = 0.$$

Consideriamo tutte le rette di S che soddisfano a questa equazione. Se noi poniamo $y_1 = p_{12}$; $y_2 = p_{34}$; $y_3 = p_{13} = p_{42}$; $y_4 = p_{14}$;

$y_5 = -p_{23}$, e assumiamo le y a coordinate omogenee in uno spazio Σ a quattro dimensioni, alle nostre rette corrisponderanno quei punti di Σ, che giacciono sulla quadrica

$$Q = y_1 y_2 + y_3^2 - y_4 y_5 = 0.$$

A un punto (y_i) di Σ corrisponde in S la retta che passa per i due punti di S, le cui coordinate sono rispettivamente $\left(1, 0, \frac{y_5}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}\right)$ e $\left(0, 1, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}\right)$; ossia al punto (y_i) di Σ corrispondono i moduli trascendenti $x_{11} = \frac{y_5}{y_1}$; $x_{12} = \frac{y_3}{y_1}$; $x_{22} = \frac{y_4}{y_1}$.

A un cambiamento del sistema di tagli corrisponderà sui periodi ω_i di un integrale abeliano u di prima specie una trasformazione

$$\omega'_i = \sum_{k=1}^{4} n_{ik}\,\omega_k \qquad (n_{ik} = \text{numeri interi}).$$

E come sopra riconosciamo che il determinante delle n_{ik} non può essere differente da ± 1. La precedente trasformazione non può dunque mai essere *infinitesima.* Se noi facciamo variare in tutti i modi possibili il sistema normale di tagli, questa trasformazione genererà dunque in S un *gruppo proiettivo* G p. d. t. i. Ora una proiettività in S individua evidentemente una trasformazione lineare intera omogenea sulle p_{ik}. Al gruppo G corrisponderà dunque un gruppo G', p. d. t. i., di trasformazioni lineari intere omogenee sulle p_{ik}, le quali dovranno, per quanto si è detto, trasformare in sè stessa l'equazione $p_{13} - p_{42} = 0$. Il gruppo G' si potrà quindi considerare anche come un gruppo proiettivo nello spazio Σ, che trasformi in sè stessa la quadrica $Q = y_1 y_2 + y_3^2 - y_4 y_5 = 0$, o, ciò che è lo stesso, la quadrica

$$Q = \frac{(y_1 + y_2)^2}{4} + y_3^2 + \frac{(y_4 - y_5)^2}{4} - \frac{(y_1 - y_2)^2}{4} - \frac{(y_4 + y_5)^2}{4} = 0.$$

Per il teorema X del § 21 (pag. 131) abbiamo dunque che:

Il gruppo G' opera in modo pr. dis. sui punti complessi della quadrica $Q = 0$ di Σ.

E, poichè i punti di questa quadrica sono in corrispondenza

biunivoca continua coi possibili sistemi di moduli trascendenti di una curva di genere 2, possiamo (§ 18, pag. 118) enunciare il precedente risultato anche così:

Il gruppo G opera in modo pr. dis. sui valori complessi delle x_{11}, x_{12}, x_{22}. In altre parole G è pr. dis. in uno spazio R, in cui x_{11}, x_{12}, x_{22} sono coordinate non omogenee (naturalmente quando si pensi R luogo dei suoi punti reali e complessi).

Osservazione I. — Il gruppo G, pensato come gruppo di trasformazioni in R, gode di una proprietà notevole. Per trovarla, si noti che dalle $x_{11} = \frac{y_5}{y_1}$, $x_{12} = \frac{y_3}{y_1}$, $x_{22} = \frac{y_4}{y_1}$, e dalla $Q = 0$, scende che

$$d\,x_{12}^2 - d\,x_{11}\,d\,x_{22} = \frac{1}{y_1^2}\,(d\,y_1\,d\,y_2 + d\,y_3^2 - d\,y_4\,d\,y_5).$$

Una trasformazione di G è una trasformazione lineare intera omogenea sulle y, che, trasformando in sè stessa la $y_1 y_2 + y_3^2 - y_4 y_5 = 0$, moltiplicherà per un fattore finito la forma $d\,y_1\,dy_2 + d\,y_3^2 - - d\,y_4\,d\,y_5$ e quindi anche la $d x_{12}^2 - d\,x_{11}\,d\,x_{22}$. Il gruppo G è dunque un gruppo conforme per la *metrica euclidea indefinita*, che ha la forma $d\,x_{12}^2 - d\,x_{11}\,d\,x_{22}$ come elemento lineare. E il nostro risultato è quindi un caso particolare del teorema XI del § 21.

Osservazione II. — La propria discontinuità di G si poteva anche dedurre dal teorema II del § 17, ricordando che i tre moduli algebrici z_1, z_2, z_3, considerati come funzioni delle x, sono invarianti rispetto al gruppo G. Questo metodo, per quanto si possa applicare anche al caso di $p > 2$ (con qualche modificazione, se $p > 3$) ha però assai minore interesse del metodo da noi seguito. Infatti la via da noi scelta ci ha dimostrato che il nostro gruppo è soltanto un caso particolare di un'intiera classe di gruppi: *i gruppi di trasformazioni conformi in una metrica euclidea indefinita;* i quali tutti sono pr. dis., quando sono p. d. t. i. Teoremi generali di esistenza per le funzioni invarianti per uno di questi gruppi non sono però ancora conosciuti.

Accanto alle funzioni, di cui qui abbiamo discorso, ne esistono altre, che nella teoria dei gruppi fuchsiani compiono un ufficio perfettamente analogo a quello che le precedenti funzioni compiono nella teoria degli integrali abeliani.

Sia G un gruppo di trasformazioni lineari su una variabile x, che sia un gruppo di movimenti in una metrica a curvatura costante. Se G è fuchsiano, esso non sia pr. dis. sui punti dell'assoluto della metrica corrispondente. Supporremo G di genere finito $p \geqslant 1$. Sia n il numero dei cicli di vertici non accidentali di un campo fondamentale K di G, $\frac{2\pi}{l_1}, \frac{2\pi}{l_2}, \ldots, \frac{2\pi}{l_n}$ le somme degli angoli di K in ciascuno di questi cicli. Noi diremo con Fricke che G ha *la segnatura*

$$(p, n; l_1, l_2, \ldots, l_n).$$

Gruppi simili avranno la stessa segnatura; ***noi non li riguarderemo come distinti.*** Notiamo però che un gruppo non è individuato in generale dalla sua segnatura: esistono infatti gruppi non simili, che hanno la stessa segnatura.

Un gruppo G della segnatura sopra scritta possiede generalmente un campo fondamentale con $4p+n$ coppie di lati equivalenti (*). Per individuare il gruppo basterà dare p. es. i coefficienti α delle $4p+n$ trasformazioni, che portano un lato di un

(*) Si può dimostrare che un gruppo G della segnatura su scritta ha generalmente un campo fondamentale con $4p+n$ coppie di lati equivalenti. Infatti sia F la superficie Riemanniana di genere p, che si ottiene piegando un campo fondamentale di G, in guisa che punti corrispondenti del contorno si sovrappongano. Rendiamo F semplicemente connessa col solito sistema di $3p$ tagli a, b, c. Ogni taglio a sarà diviso dai corrispondenti tagli b, c in due pezzi a', a''. Congiungiamo un punto di uno di questi tagli, p. es. il punto che serve di origine ai tagli c, agli n punti di F, immagine dei cicli di vertici non accidentali di K, e tagliamo F lungo questi nuovi n tagli d. La F, tagliata così lungo $3p+n$ tagli, resterà ancora semplicemente connessa, e sul piano della x avrà appunto per immagine un poligono P con $4p+n$ coppie di lati (in generale non rettilinei) equivalenti, immagine rispettivamente dei tagli a', a'', b, c, d.

campo fondamentale nel lato equivalente, e che, com'è noto, formano un sistema di trasformazioni generatrici per il gruppo. Queste quantità α non saranno tutte indipendenti, ma dovranno naturalmente soddisfare a condizioni, che noi non vogliamo qui precisare. Di più, poichè gruppi simili non si considerano come distinti, noi potremo trasformare G con una tale trasformazione lineare che tre dei coefficienti α abbiano valori prefissati.

Notiamo però che, mentre i coefficienti α individuano completamente il gruppo G, questo gruppo non individua questi coefficienti, in quanto che a uno stesso gruppo corrispondono infiniti sistemi di $4p+n$ trasformazioni generatrici (*). Da uno di questi sistemi si passa a ogni altro con una trasformazione birazionale sui coefficienti α. Indicheremo con Γ il gruppo generato da queste trasformazioni birazionali sulle quantità α.

Due funzioni fuchsiane generiche, invarianti per G, sono legate da una relazione algebrica, a cui corrisponde una superficie Riemanniana, i cui punti sono in corrispondenza biunivoca coi punti di un campo fondamentale K di G, quando non si considerino come distinti punti equivalenti del contorno di K. *Tutte le curve algebriche corrispondenti sono quindi in corrispondenza biunivoca algebrica.*

Viceversa *siano date due curve algebriche C, D di genere $p \geqslant 1$ in corrispondenza biunivoca algebrica. Su di una di esse segniamo n punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$; e sull'altra segniamo i punti corrispondenti $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Siano $l_1, l_2, \ldots, l_n$ interi arbitrarii.* Per i risultati dell'ultimo capitolo sappiamo che esiste un gruppo G di movimenti in una metrica a curvatura costante, tale che le coordinate dei punti di C siano funzioni uniformi di una variabile x, invarianti per G, che ai cicli di vertici non accidentali di un campo

(*) E ciò, perchè un gruppo non individua il proprio campo fondamentale. Se noi costruiamo il poligono P col metodo indicato nella precedente nota, l'indeterminazione di P risulta ben chiara, appena si ricordi p. es. l'indeterminazione, di cui è suscettibile il sistema dei $3p$ tagli, che rendono F semplicemente connessa.

fondamentale K per G corrispondano i punti A di C, e che gli angoli di K in uno di questi cicli abbiano rispettivamente per somma $\frac{2\pi}{l_1}, \frac{2\pi}{l_2}, \ldots, \frac{2\pi}{l_n}$. E anzi, se non consideriamo come distinti gruppi G simili, il gruppo G è individuato completamente. Così pure alla curva D e ai punti B corrisponderà un altro gruppo G'. La corrispondenza biunivoca algebrica tra i punti di C, D individua una corrispondenza conforme tra due delle reti di campi fondamentali di G, G'. *Questi due gruppi sono dunque simili; e noi li dovremo riguardare come identici* (*). Ora, se noi riguardiamo come non distinte curve in corrispondenza biunivoca algebrica, l'insieme di una curva C e di n punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$, posti su di essa, dipende da $r = 3p - 3 + n$ *moduli* (soltanto, se $p = 1$, $n = 0$, il numero r di questi moduli è uguale a 1). Ora per un teorema di Poincaré (pag. 302) questi r moduli variano con continuità al variare continuo di G, e sono anzi funzioni analitiche dei corrispondenti parametri α. Per quanto abbiamo detto, *queste r funzioni analitiche sono funzioni invarianti per il gruppo* Γ, e costituiscono un notevolissimo esempio di funzioni cremoniane, che non sono state finora sottoposte a diretta ricerca.

Insieme a ciò, noi abbiamo conseguito un altro risultato: che cioè i gruppi G di segnatura $(p, n: l_1, l_2, \ldots\ldots l_n)$, che si possono considerare come gruppi di movimenti in una metrica a curvatura costante, e che, se fuchsiani, posseggono due reti distinte di campi fondamentali, formano, considerati come punti, e quando gruppi simili si considerino come identici, una varietà continua ad r dimensioni *complesse*; o, in altre parole, che ogni tale gruppo si può individuare, dando i valori di r parametri complessi, o, ciò ch'è lo stesso, di $2r$ parametri reali, variabili con continuità in un certo campo.

(*) È assai notevole il fatto che la corrispondenza biunivoca algebrica tra le due curve C, D in guisa che ai punti A corrispondano i punti B, appaia come un fatto equivalente alla similitudine dei gruppi G, G'.

Questo risultato, che Fricke dimostra nel suo trattato in modo diretto, è stato generalizzato dal Fricke stesso ai gruppi fuchsiani, che posseggono una sola rete di campi fondamentali.

Esempio. — I gruppi G di traslazioni euclidee, che hanno un parallelogrammo come campo fondamentale sono formati da traslazione del tipo:

$$x' = x + m\alpha + n\beta \qquad (\alpha, \beta \text{ costanti})$$

dove m, n sono interi variabili da trasformazione a trasformazione. A gruppi G simili corrisponde uno stesso valore del rapporto $\tau = \frac{\beta}{\alpha}$, e noi possiamo supporre che $I(\tau) > 0$ (*) (pag. 233). Valori di τ, equivalenti rispetto al gruppo modulare, corrispondono a gruppi G simili (§ 34, pag. 223). Il gruppo modulare è dunque, nel caso attuale, il gruppo Γ. Sia $f(x, y) = 0$ una curva di genere 1, corrispondente al nostro gruppo G. L'invariante assoluto di tale curva è una funzione di τ, invariante per il gruppo modulare. (Cfr. anche pag. 395-396).

(*) Con $I(\tau)$ indico, al solito, il coefficiente della parte immaginaria di τ (pag. 108).

OSSERVAZIONI VARIE

I. — **Sulla discontinuità di un gruppo kleiniano.**

(cfr. pag. 195-198).

A pag. 197 noi abbiamo dato il seguente teorema (cfr. loc. cit. per le notazioni):

Se w' è un pezzo di Q, in cui esiste almeno un punto B, che sia punto limite di infiniti campi normali, e se w' è un altro pezzo di Q, in ogni intorno di B esiste almeno un punto equivalente a un punto generico E di w'.

Questo teorema si può facilmente completare, dimostrando che esso vale *per ogni punto E di w'*, quando si escluda il caso che *tutte* le trasformazioni del nostro gruppo lascino fissi entrambi i punti E, B, ossia quando si escluda il caso banale dei gruppi generati da trasformazioni iperboliche o lossodromiche, e da trasformazioni ellittiche periodiche, aventi a comune i due punti base E, B (cfr. pag. 239). Infatti, se ciò non avviene, allora o tutte le trasformazioni del gruppo G lasciano fisso il punto E, (e non lasciano fisso B) oppure esiste su Q almeno un punto E', distinto da E, ed equivalente ad E. Nel primo caso il nostro gruppo è simile a un gruppo di similitudini euclidee, il quale, essendo privo di trasformazioni infinitesime, e non lasciando fisso il punto B, è per i risultati di pag. 238-239 pr. dis. in un intorno di B, co-

sicchè B non sarebbe punto limite di infiniti poliedri normali contro l'ipotesi. Nel secondo caso sia α un intorno qualsiasi di B sulla sfera Q, g un piccolo cerchietto, posto in α, e contenente B all'interno; sia γ quella regione dello spazio ambiente, che è limitata dal piano passante per g, e da quella calotta di Q, a cui appartiene il punto B. Se A è un qualsiasi punto della retta $E\,E'$, interno a Q, in γ esiste (teorema I, pag. 195) almeno un punto A' equivalente ad A. La retta passante per A', equivalente alla retta $E\,E'$, incontrerà α almeno in un punto E'', che sarà equivalente ad E, E'.

c. d. d.

Dalla precedente osservazione possiamo trarre una importante conseguenza.

Se G è un gruppo kleiniano p. d. t. i. che trasforma in sè stessa una regione Λ del piano π della corrispondente variabile complessa x, e se esistono punti di π non appartenenti a Λ, allora G è pr. dis. in π.

Questo teorema estende *a regioni Λ qualunque* il teorema che afferma la discontinuità propria di ogni gruppo (fuchsiano) G p. d. t. i., che trasformi in sè stessa *una regione circolare* Λ. Per dimostrare il nostro teorema si osservi che, se G non fosse pr. dis. in un punto B interno a Λ, in ogni intorno di B esisterebbero punti equivalenti a un qualsiasi punto E di π, che non sia lasciato fisso da *tutte* le trasformazioni di G: e ciò, anche se E non appartiene a Λ. Per la nostra ipotesi ne scenderà che ogni punto E esterno a Λ deve essere lasciato fisso da tutte le trasformazioni di G. Quindi G sarebbe simile a un gruppo di similitudini euclidee p. d. t. i.: e, per i risultati di pag. 238-239, sarebbe dunque pr. dis. in tutto π. La contraddizione dimostra il nostro asserto.

Ne segue anche:

Se G non è pr. dis., ogni punto B di Q è punto limite di infiniti poliedri fondamentali: e in un intorno α di ogni punto B di Q esistono punti equivalenti a un qualsiasi punto E di Q.

Quindi:

Se G non è pr. dis., i punti equivalenti a un qualsiasi punto E formano un insieme di punti denso in tutto π.

Se dunque per un particolare punto E avviene che i punti ad esso equivalenti non formano un aggregato dappertutto denso, altrettanto avverrà per ogni punto di π; e G sarà pr. dis. in π.

II. — **Sulle funzioni zeta-automorfe.**

(cfr. pag. 116, righe 6-10 e pag. 259, righe 20-21).

Abbiamo visto al § 17 che il problema (B) non è risolubile, quando G non è pr. dis., mentre nulla abbiamo conchiuso in tal senso per il problema (A). Il mio amico dott. Eugenio Levi mi comunica la seguente notevole osservazione che esistono casi, in cui si può dimostrare la irresolubilità del problema (A), se G non è pr. dis. E precisamente si può dimostrare che ***non esistono funzioni zeta-automorfe*** (*o zetacremoniane*) *di una variabile x* (*distinte da una costante o da una funzione razionale*), *quando il gruppo G è un gruppo p. d. t. i. impropriamente discontinuo*, e in particolare quindi che non esistono sistemi di effettive funzioni $z_1, z_2, ..., z_m$ della x, le quali subiscono le trasformazioni di un gruppo Γ lineare intero omogeneo, quando la x subisce le trasformazioni di un gruppo G (p. d. t. i.) di trasformazioni lineari sulla x, che non sia pr. dis.

Infatti si osservi che (cfr. osservazione I) i punti equivalenti a un punto A rispetto ad un tale gruppo G formano un aggregato di punti dappertutto denso nel piano della variabile complessa x; cosicchè il campo di esistenza delle funzioni $z_1, z_2, ... z_m$, che deve essere trasformato in sè stesso da G, si deve estendere a tutto il piano. Notiamo ancora che si può sempre fare l'ipotesi che le $z_1, z_2, ..., z_m$, siano linearmente indipendenti. Poichè, ove ciò non fosse, si potrebbe esprimere una di esse, per es. z_1, per

le $z_2, \ldots z_m$; ed il sistema delle $m - 1$ funzioni $z_2, \ldots, z_m$ risulterebbe ancora un sistema di funzioni zeta-automorfe relative al gruppo G.

Segue di qui che, se una particolare operazione del gruppo Γ lineare omogeneo fa passare dalle z_i alle z'_i, si potranno sempre inversamente esprimere le z_i in funzione delle z'_i.

Ciò posto, diciamo punto singolare per il sistema delle funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_m$ un punto singolare per una qualunque delle funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_m$; dalla precedente osservazione segue che un punto equivalente ad un punto singolare per il sistema delle funzioni z_i è certamente ancora singolare per il sistema delle funzioni z_i. Ma i punti equivalenti ad un punto qualunque del piano formano un insieme ovunque denso: quindi se il sistema delle z_i ha un punto singolare, il sistema dei punti singolari delle z_i è ovunque denso.

Ciò è assurdo; le z_i non hanno quindi mai punti singolari, e, poichè sono funzioni uniformi in tutto il piano, si riducono a costanti.

c. d. d.

Qualora il gruppo Γ non fosse di trasformazioni lineari intere omogenee, ma di trasformazioni lineari fratte, occorrerebbe considerare come punti singolari per le z_i i soli punti singolari essenziali: ciò porterebbe a dire che le funzioni z_i non possono che essere funzioni razionali della x; ed analogo risultato si otterrebbe quando Γ fosse un gruppo di trasformazioni birazionali (purchè naturalmente si conservi l'ipotesi che le z debbono essere *uniformi* nella x).

TAVOLA DELLE MATERIE

Capitolo settimo. — **Applicazioni aritmetiche.**

Capitolo ottavo. — **I gruppi fuchsiani e kleiniani.**

Appendice.

Osservazioni varie.